



TITLE:

サンプル値制御に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

岩井, 壮介

CITATION:

岩井, 壮介. サンプル値制御に関する研究. 京都大学, 1964, 工学博士

ISSUE DATE:

1964-09-29

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r354>

RIGHT:

サンプル値制御に関する研究

岩 井 壯 介

サンプル値制御に関する研究

岩 井 壯 介

目 次

序 論	1
第 I 編 線形サンプル値系の理論的研究	5
第 1 章 緒 言	5
1・1 z 変換法とインパルス変調法	5
1・2 状態変数を用いた位相空間による解析法	9
第 2 章 カット・オフ・オペレータ法による解析	11
2・1 カット・オフ・オペレータ法による解析法の意義と特徴	11
2・2 カット・オフ・オペレータ	13
2・3 柱状サンプリング機構を含むサンプル値系の解析	14
2・4 純パルス状サンプリング機構を含むサンプル値系の解析	22
2・5 安定判別計算例	27
第 3 章 有限整定時間応答系における整定サンプリング回数の短縮法	31
3・1 Jury および Schroeder の有限整定時間応答系の設計法	31
3・2 マルチルート方式による整定回数の短縮法	34
3・2・1 基本式	
3・2・2 制御量 $Y(s)$ の整定回数を最短にするための $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ の決め方	
3・2・3 $D_{F2}^*(z)$ の出力が最終的に零になるように $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ を決める方法	
3・2・4 数値計算例	

(2)

第 II 編	非線形サンプル値系の理論的研究	60
第 4 章	有限整定時間応答系における飽和の影響	61
4・1	飽和現象と有限整定特性	61
4・2	飽和現象により有限整定時間応答系の受ける 制御特性の変化	65
4・2・1	時間および信号の無次元化	
4・2・2	制御対象、制御装置のパルス伝達関数	
4・2・3	飽和値 μ と飽和現象	
4・2・4	$q=0$ の場合に対する自乗制御面積の計算式	
4・2・5	$q \neq 0$ の場合に対する自乗制御面積の計算式	
4・2・6	$p, q, \zeta_P, \zeta_{P-1}$ および ζ_q の図式求法	
第 5 章	サンプル値系における飽和による乱調現象	94
5・1	サンプル値系における条件付安定現象	94
5・2	サンプル値系における乱調現象の実際例	95
5・2・1	実際例その 1	
5・2・2	実際例その 2	
5・2・3	実際例その 3	
5・3	乱調現象の有無の判定および特定初期入力に 対する乱調発生条件	99
5・3・1	むだ時間 $T_L = nT$ ($n=1, 2, \dots$) を有する 1 次おくれ系 $G(s) = Ke^{-sT_L}/(1+T_0s)$ に対し、 目標値 (ステップ)、外乱 (ステップ) 両入 力の場合においても目標値に対し、有限整定 時間応答するよう制御装置を設計したとき	
5・3・2	$n=0$ すなわち、むだ時間のない 1 次おくれ 系 $G(s) = K/(1+T_0s)$ に対し、目標値 (ス テップ)、外乱 (ステップ) 両入力の場合 においても目標値に対し、有限整定時間応答 するよう制御装置を設計したとき	

- 5.3.3 2次のサーボ系 $G(s) = K/s(1+T_0s)$ において、目標値(ステップ)に対してのみ有限整定時間応答するよう制御装置を設計したとき。

第6章 サンプル値系におけるサンプリング周期の

整数倍を周期とする非線形振動の解析	123
6.1 サンプル値系における非線形整数次振動	123
6.2 非線形パラメータと基本平衡条件式	126
6.3 非線形特性と非線形パラメータ	132
6.3.1 飽和特性と非線形パラメータ	
6.3.2 リレー特性と非線形パラメータ	
6.4 周期 lT の整数次振動の有無の吟味方法	134
6.5 サンプル値整数次振動の平衡状態の安定問題	140
6.5.1 サンプル値系に対する変分方程式	
6.5.2 可変ゲイン・サンプル値系の安定判別	
6.6 例題	146
6.6.1 (5.2.1) 実際例その1 (頁96) に示した系の場合	
6.6.2 (5.2.2) 実際例その2 (頁97) に示した系の場合	
6.6.3 安定な平衡状態を有する場合の例	
6.6.4 オン・オフ・サンプル値系に対する適用例	

第7章 サンプル値系に対する等価伝達関数法の適用

7.1 サンプル値系における等価伝達関数の特異性	185
7.2 非線形振動の周波数がサンプリング周波数に 比べ十分小さい場合——その1 (制御装置 出力パルス列包絡線の連続波形に対し、等価 伝達関数を定義する方法)	186
7.2.1 制御系目標値入力の定常値が零の場合	
7.2.2 制御系目標値入力の定常値が一定値 γ で ある場合	

(4)

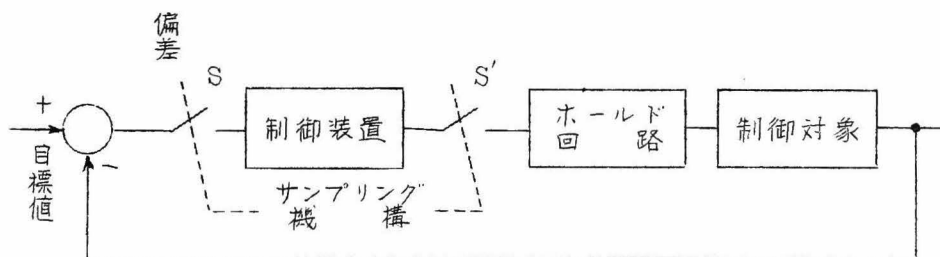
7・3	非線形振動の周波数がサンプリング周波数に 比べ十分小さい場合——その2（ホールド回 路出力階段状波形の基本波成分に対し等価伝 達関数を定義する方法）	193
7・3・1	制御系目標値入力の定常値が零の場合	
7・3・2	制御系目標値入力の定常値が一定値の場合	
7・4	上記 7.2, 7.3 に示した手法の適用例	196
7・5	非線形振動の周波数がサンプリング周波数に 近い場合	198
7・5・1	ω_s/ω が偶数の場合	
7・5・2	ω_s/ω が奇数の場合	

第Ⅲ編	サンプル値制御の実際応用と制御装置 試作に関する研究	214
第8章	サンプル値制御用制御装置	214
第9章	簡易型サンプル値制御装置	217
9・1	制御装置の基本的構成法	217
9・2	試作装置の演算基本式	219
9・3	主要部分結線図および主要構成要素	221
9・4	1 サンプル期間中における各演算ステップ の動作	224
9・5	各ステップの長さと言算時間	232
9・6	特性計算例	233
第10章	多重サンプル値制御装置	239
10・1	多重制御を適用する系および外乱の概要	239
10・2	信号、時間の無次元化および基本式	241
10・3	サンプリング周期に対する吟味	242

10・4	サンプリング周期と系の安定度との関係	251
10・5	微分操作に対する吟味	253
10・6	サンプル値多重（比例＋積分）制御を実施する ための基本的回路構成	255
10・7	サンプリングおよび記憶（ホールド）回路の 基本的特性	257
10・8	試作5重サンプル値制御装置の動作タイムチャート	259
10・9	試作装置主要構成要素および全結線図	267
10.9.1	プラグインユニット No. 0, 1, … 5	
10.9.2	パルス分配回路	
10.9.3	外部接続回路（コンソール側配線）	
10・10	試作装置動作試験	275
10・11	工場実験例	282
結 言		293
謝 辞		300
附 録		301
参 考 文 献		347

序 文

一般に、連続制御系においては線形あるいは、非線形の別はあるにしても、系のいずれの部分の信号も時間的には連続であるのが常である。信号の不連続的な変化を利用するオン・オフ制御系や、リミッター、不飽和、バックラッシュ等の非線形特性を含む制御系においても、フィード・バック制御の基本原理解である制御系入力（目標値）と制御系出力（制御量）との比較、反省動作は絶え間なく行なわれるものであり、これらもやはり連続制御の特殊なものとも見ることができる。これに対し、たとえばわれわれが車を運転する場合を考えるに、車を目的どおりに、あるいは危険をおかさずに運転するため、バック・ミラーの監視、あるいは前方注視等の動作を決して時間的に連続して行なっているわけではなく、ほぼ一定時間間隔で行なっているのであり、運転に必要な外圍条件を知るにはそれで十分である。その余の時間はそれぞれ、別の有意の目的に使用している。これと同じようにフィードバック制御系においても、目標値と制御量との差を取り、偏差信号を知る反省動作は必ずしも連続して行なう必要があるわけではなく、下図に示すようにサンプリング機構 S により、一定時間毎に行なうだけで十分な場合が多い。この場合考えられることは、連続関数を一定サンプリング周期でサンプリングすることにより、一般に連続信号の有する情報の一部分は失なわれてしまうのが普通である。しかし、連続信号の有する周波数成分の上限が限られている、あるいは限られていると見なせる場合には、サンプリング周期



を適当にえらぶことにより、理想フィルター (*ideal filter*) の助けをかりて原波形を再現することが可能である。この性質を立証するものが、采谷・シャノン (Shannon) のサンプリング定理 (*sampling theorem*) である。実際にはこの理想フィルターの代わりに、図に示したホールド回路が用いられる。

このようなサンプリング検出方式を採用することによりたとえば、鉄鋼用平炉の天井最高温度の制御において見られるように、炉の運転により移動する天井最高温度点を、炉天井の各部に配置された熱電対の起電力を順次走査して行くことにより絶えず天井の最高温度点に注目して炉、、、入力を操作するようなことが可能になる。

サンプリング制御は以上の理由の他、連続検出動作の不可能な場合やまたは、デジタル的なデータの方が便利な場合、たとえば、

- デジタル計算機を制御ループ中に含む場合
- 1 台のデジタル形計算機または、制御装置で多くの制御対象を同時に制御する場合
- 偏差検出機構の構造または、被測定対象の性格上、連続検出のできない場合、
- サンプル値系の特質を生かした制御方式、たとえば第 I 編第 3 章で説明する最適制御の 1 つと考えられる有限整定時間応答補償を実施する場合

などにおいて、この制御方法が採用される。

以上説明したサンプリング制御の原理の応用は、むしろ連続制御よりも古く、例えば古くより知られている落下棒式調節計はサンプリング動作とオンオフ動作 (リレー動作) を巧妙に組合せることにより、偏差信号を検流計のような高感度の要素で検出し、指針の微弱なトルクを簡単な落下棒機構で増幅するものである。

本論文、第 I 編においては線形サンプル値制御系をとり上げ、まず第 1 章において、現在、広く用いられているサンプル値系解析理論の概要を紹介し、第 2 章において、これらとは異った立場から出発した、断続

回路理論に立脚せるサンプル値系の1解析法について述べる。第3章においては、最適制御の1つと考えられるサンプル値系における有限整定時間応答の問題をとり上げ、その最適問題における評価尺度の1つである整定時間（制御系の過渡応答が完全に消滅し、制御量が目標値にオフセットなく一致するに至るまでの経過時間）を短縮する1方法につき述べる。

本論文、第II編においては、サンプル値系における非線形問題について考察する。

まず第4章においては、上に説明した有限整定時間応答系で、系の1部に飽和を生じた場合、普通一般の設計法による系においては有限整定の特質である有限時間内での過渡現象の終了という性質が失なわれることを指摘し、飽和の度合と制御の良さの変化の様相について考察する。

つぎに、有限整定時間応答系のあるものでは、少々の飽和に対しては系の信号が飽和域を脱してのち再び、有限整定特性を回復するものも考えられているが、このような高級な設計法に従った場合、用うる制御装置としては、それ自身不安定極を含む不安定要素を用いなければならない場合が多い。このような場合には系の一部に飽和が存在し、そのためルーパー巡のゲインが等価的に下ると制御装置の有する不安定特性が現れ、乱調を呈することがある。第5章においてはまずこれらの実例をあげ、それらの系につき目標値入力の大きさと乱調発生条件との関係を求め、このような乱調現象を防止するには制御対象のパラメータに対し、サンプリング周期を如何に選定すればよいかについて考察する。

さて、サンプル値系における非線形の問題において、連続系と大いに趣きを異にすることは、サンプル値系においては、その非線形振動の周期とサンプリング周期とが整数倍の関係にあるか、非整数倍の関係にあるかによってその解析に非常な難易の差が生ずることである。一般に非整数倍関係にある場合、その振動の平衡点、平衡点における周波数を求めるなどの解析は、近似法によらない場合には非常に困難になる。ところが、実際にサンプル値系において遭遇する非線形振動の問題にお

いて、非線形振動周波数および、サンプリング周波数両者が整数倍にならないというような特殊事情は一般には存在せず、両者の間には何等因果関係がないものとして解析するのが自然である。

以上述べたことより、サンプル値系の非線形振動の解析においては、振動周波数、サンプリング周波数両者の関係は非整数倍の関係にあるとして考察するのが本来であるが、近似法によらない場合には解析が非常に困難であるので、まず第6章においては、両者の関係が整数倍関係にある特殊な場合について解析を行い、もって、サンプル値系における非線形振動平衡の機構および、その平衡点の安定問題について考察を行い、一般非線形振動考察への足がかりとする。ただし、ここで取りあつかう整数倍関係の振動はサンプル値系一般については特殊の場合に相当するが、さきに述べた落下棒式調節計で代表されるリレー非線形を伴うサンプル値系では最も一般的な振動形式であり、これらの系の非線形振動については本章の手法により、何等近似をまじえることなく平衡状態の吟味が可能である。

第7章においては連続系における非線形振動の工学的解析手段として知られている等価伝達関数法をサンプル値系に応用する方法につき述べる。ここにおいても、非線形振動周期とサンプリング周期との整数、非整数倍の関係、サンプリング時点に対する非線形振動の位相関係等連続系とは異った考え方が必要になる。

第Ⅲ編においてはサンプル値制御の実用化に関連して行った制御装置の試作について述べ、かつ実際応用の一例として絶縁電線製造工程における芯線被覆機のキャパシタンス制御に試作多重サンプル値制御装置を用いた結果について説明する。

第 I 編 線形サンプル値系の理論的研究

さて序文において述べた通り、サンプル値制御の概念はむしろ連続制御よりも早く芽生えながらその一般普及が遅れた原因の一つに、その解析がむづかしかったこと、換言すれば序文における図に示すサンプリング機構をどのように数学的に取りあつかうかに問題があったことが指摘できる。

本編第 1 章においては現在サンプル値制御系の解析に用いられている主なる数学的手法を紹介し、第 2 章において、これらとは全く異った断続回路理論を応用したカットオフオペレータ法 (cut off operator) による解析法について説明する。

つぎに第 3 章においては、最適リレー切替制御等と同じく、最適制御 (optimal control) の 1 つに属するサンプル値系における有限整定時間応答 (finite settling time response in sampled-data systems) を取り上げ、その制御特性の評価尺度の 1 つである整定時間を短縮する 1 方法につき述べる。

第 1 章 緒 言

1.1 Z 変換法とインパルス変調法

序文における図より明らかなように、サンプル値系においては、サンプル値信号部分と連続信号伝達部分とが共存する。したがって、その数学的な解析方法としては、サンプリング周期 T 秒毎の信号値に注目して解析を進める方法と サンプリング動作をパルス変調と考え、サンプル値信号部分に連続系の手法を適用し、従来の連続制御系におけるラプラス変換法を使用して解析を進める方法の 2 通りが考えられる。前者に属するものとしては第 2 次世界大戦中、ドイツの Oldenbourg と Sarlo-

rius によって確立された定差方程式による解析法^{*}およびその後この方法に代って現れた z 変換法(z -transformation method)があり、後者に属するものとしては Linvill によって提唱されたインパルス振幅変調法($impulse\ amplitude\ modulation\ method$)による解析法^{**}がある。

現在の線形サンプル値制御理論はほとんど上記 z 変換法に基づいているが、 z 変換法はサンプル値系の過渡特性の考察、ディジタル計算機を含む系の解析等に適し、インパルス変調法はサンプル値系の特性を周波数領域で把握するのに適した方法である。

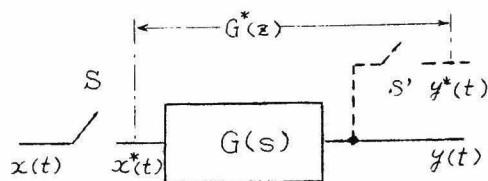


図 1.1 z 変換法の原理

さて上記 z 変換法によれば
図 1.1 のサンプル値系に対し

てつぎの関係が成立する。ただし図におけるサンプリング機構 S , S' は各連続信号 $x(t)$, $y(t)$ の時刻 $t=0, T, 2T, \dots$ 毎の値を大きさ(moment)とするインパルス列に変換する機構と考える。このように考えないと普通の要素では出力は常にゼロとなる。

$$Y^*(z) = G^*(z) X^*(z) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} X^*(z) &\equiv \mathcal{L}[x^*(t)]_{e^{sT}=z} = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t-kT)\right]_{e^{sT}=z} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} Y^*(z) &\equiv \mathcal{L}[y^*(t)]_{e^{sT}=z} = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} y(t) \delta(t-kT)\right]_{e^{sT}=z} \\ &= y(0) + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

上の諸式における $X^*(z)$, $Y^*(z)$ および $G^*(z) = Y^*(z)/X^*(z)$ を $x(t)$, $y(t)$ (あるいは $x^*(t)$, $y^*(t)$, 更に或は $X(s)$, $Y(s)$) および

* R.C. Oldenbourg and H. Santorius : The Dynamics of Automatic Controls, A. S. M. E., Chapt. 5, pp 189-193(1948).

** W. K. Linvill and J. M. Salzer : Analysis of Control System Involving Digital Computers, Proc. IRE, Vol. 41, No. 7, pp. 901-908, 1953.

線形伝達要素 $G(s)$ の z 変換 (z -transform) と言う*。

$G(s)$ のインパルス応答 (重み関数) を $g(t)$ とすれば、

$$G^*(z) = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(t) \delta(t-kT) \right] e^{sT} = z \quad (1.4)$$

で表わされる。式 (1.3) より明らかなように、 z 変換より得られる図 1.1 の系の出力 $y(t)$ の情報は $t=0, T, 2T, \dots$ なるサンプリング時点のみに関するものだけであり、サンプリング時点間の過渡応答をこれから求めることはできない。

サンプリング時点間の応答を求めるためには図

1.2 に示すように $G(s)$

が仮想的なむだ時間 T_L

(普通は $(T-T_L)/T = m$

なるパラメータを使用す

る) を含むものと考え、 T_L を 0 から T まで (m を 1 から 0 まで) 変化させてサンプリング時点間の過渡応答を知る。これを拡張 z 変換 (modified z -transform) と称する。拡張 z 変換による表現を用いれば、

$$Y^*(z, m) = G^*(z, m) X^*(z) \quad (1.5)$$

$G^*(z, m)$ は $G(s)e^{-sT_L} \equiv G(s)e^{T(m-1)s}$ のインパルス応答に対し、式 (1.4) と同様の操作をほどこしたものである。

連続関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ 、と $f(t)$ を T なるサンプリング周期でサンプリングしたパルス列 $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT)$ の z 変換 $F^*(z)$ との間には、

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_A \frac{F(s)}{1-z^{-1}e^{sT}} ds$$

また $F(s)$ と $F^*(z, m)$ の間には、

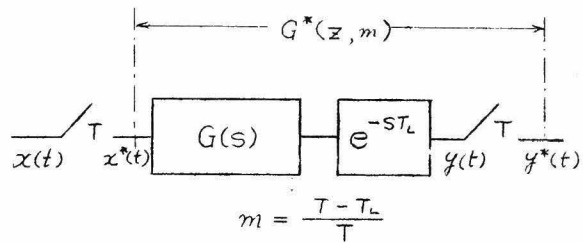


図 1.2 拡張 z 変換法の原理

* $G^*(z)$ を特に $G(s)$ のパルス伝達関数と呼ぶことが多い。

$$F^*(z, m) = \frac{z^{-1}}{2\pi j} \int_A \frac{F(s) e^{m s T}}{1 - z^{-1} e^{s T}} ds \quad \left. \vphantom{\int_A} \right\} \quad (1.6)$$

なる関係が成立し、容易に留数計算から $F^*(z)$, $F^*(z, m)$ を求めることができる。これらの積分における積分路は図 1.3 の A で表わされる $F(s)$ の特異点をすべてその中に包含するような閉曲線である。

上式の積分は

$$1 / (1 - z^{-1} e^{s T})$$

の極のみをその内部に含む同図 B なる閉曲線について行なってもよい。この場合には、

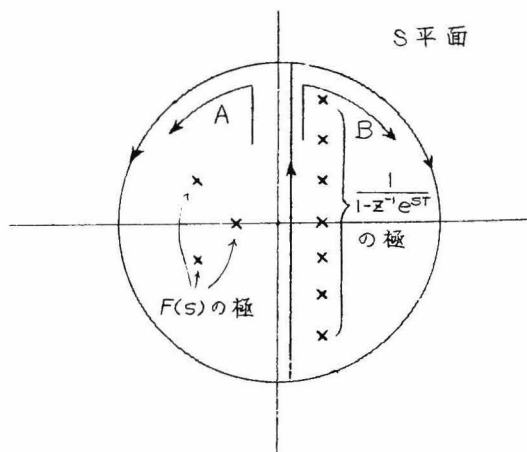


図 1.3 式 (1.6), (1.6)' の積分路

$$F^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + j n \omega_s) \equiv F^*(s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (1.7)$$

と表わされる。これが W. K. Linvill の与えた表現式である。

序文に示したサンプル値系において用いられている零次ホールドはサンプリング機構を通ったパルス列の高調波成分を除き、原波形に近づけるため 序文で述べた理想フィルターに代ってよく用いられるもので、この要素を通過することにより図 1.4 (a) に示すパルス列は、同図 (b) に示すような階段状波形になる。この操作は Z 変換においてはぎのよう

$$Y^*(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] X^*(z) \quad (1.8)$$

ここに $Z[G(s)/s]$ は $G(s)/s$ の Z 変換をとることを意味する。このようなサンプリング機構の取りあつかいは序文に示したサンプル値系のように系が制御装置として、制御用デジタル計算機を含んでおり

この出力、すなわち $G(s)$ に対する操作信号が一定時間 T 毎に新しい計算値に変更されるような場合に用いられるが、一方サンプル値系のあるものにおいては図 1.4 (c) に示すように、時刻 T 毎に有限巾 T_i ($< T$) の矩形パルスが後続要素に伝えられると考えなければならない場合も多い。このような場合に対しては G. Farmanfarma が P 変換の名で z 変換を拡張したものを発表している*。

1・2 状態変数を用いた 位相空間による解析理論

さて、従来の制御理論は一般に連続系、不連続系の別を問わず、図 1.6 で表わされるような等価ブロック

* G. Farmanfarma: Analysis of Linear Sampled-Data Systems with Finite Pulse Width (Open Loop), Trans., AIEE, Vol. 75, Part I, 1956, pp. 808~819.
: General Analysis and Stability Study of Finite Pulsed Feedback Systems, AIEE, Application and Industry, July 1957, pp. 148~162.

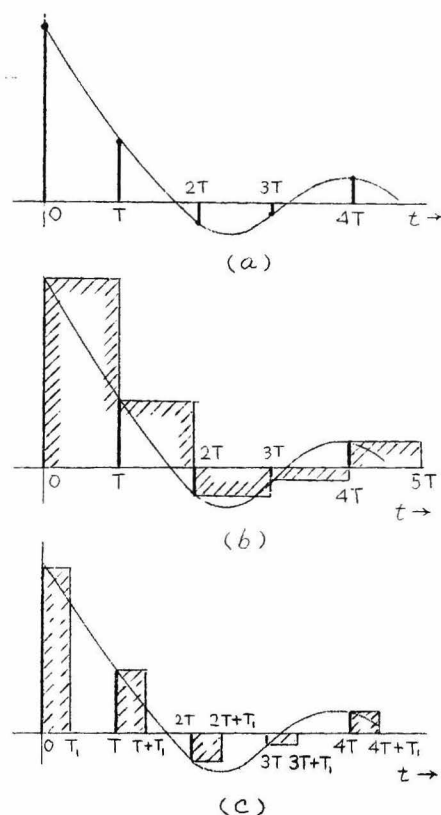


図 1.4 各種のサンプリング操作

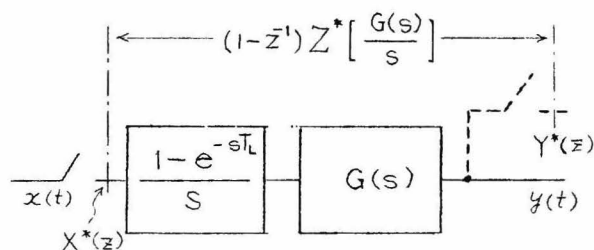


図 1.5 零次ホールドと z 変換

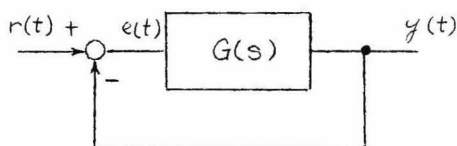


図 1.6 自動制御系

図において、制御系の特定信号、例えば図における制御系出力 $y(t)$ 、偏差 $e(t)$ 等に着目し、これらに対し制御系の伝達関

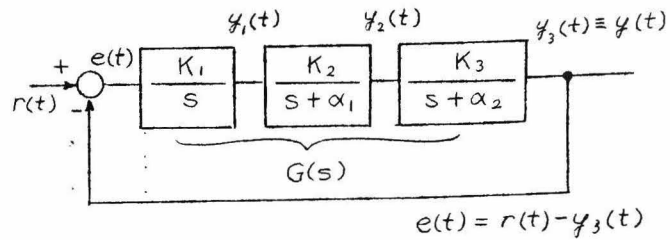


図 1.7 中間変数の導入

数 $G(s)$ の次数に等しい高次微分方程式をたて、これを基にしてその応答を追求するものが大部分であった。しかし最近においては、たとえば $G(s)$ を図 1.7 に示すように、1次おくれ要素および積分要素のカスケード結合に還元し、それぞれの入出力に中間変数 $y_1(t) \cdots y_n(t)$ を考え、これらについての連立1次微分方程式系系の応答を表現し、解析を進める方法が広く用いられるようになってきた。この方法は $G(s)$ の次数 n に等しい変数 $y_1(t) \cdots y_n(t)$ にそれぞれ対応する座標軸を考えると、により n 次元の空間（位相空間）を仮想し、 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ で形成されるベクトル、すなわち位相空間内の1点が時間の経過と共に位相空間内にどのような軌跡をえがくかに注目し、解析を進めるもので、この方法は従来の制御理論で解決しにくかった種々の非線形の安定判別、最適制御問題への1つの途を開くものと考えることができる。なかんずく安定論における Liapunov の 2nd Method, Pontryagin の Maximum Principle は特筆すべき例である。*

* R. E. Kalman and J. E. Bertram : Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Liapunov. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering. June 1960. 371~400.
 L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko : The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience Publishers. June, 1962.

第2章 カットオフオペレータ法による解析

2.1 カットオフ オペレータ法による解析法の意義と特徴

図 2.1 に示す不連続動作を含むフィードバック制御系において、不連続機構 S が単なるスイッチであり、開路時間 T_1 、閉路時間 T_2 、周期 $T = T_1 + T_2$ で外部的に開閉される開閉制御系の過渡応答解析法並びに安定判別法が京都大学近藤文治教授によって、断続回路理論を応用したカットオフオペレータ法の名の下に提案された^{*}。

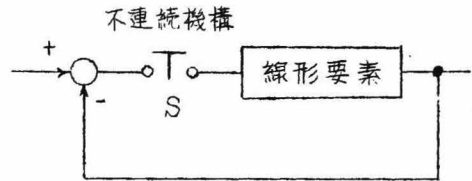


図 2.1 開閉制御系

本章において述べるサンプル値系の解析法は本カットオフオペレータ法を不連続機構がさきに述べたサンプル値系のサンプリング機構の一般形式であるところの純パルス状サンプリング機構(図 1.4(a))、柱状サンプリング機構(有限パルス巾サンプリング機構図 1.4(c))および純パルス状サンプリング+零次ホールド図 1.4(b))の場合に対し拡張したものである。

本解析法開発当時、純パルス状サンプル値系および純パルス状サンプリング+零次ホールドの系に対しては、さきに述べたように古くから定差方程式の解析手段として用いられて来た z 変換法が、これらのサンプル値系解析の手段として取り入れられつつあったが、有限パルス巾サンプル値系に対して z 変換法を基礎とした解析法が発表されたのは、本法より数年おくれて発表された G. Farmanfarma による P 変換法である。

z 変換による解析法とカットオフオペレータによる解析法とを比較すれば、図 2.2 に示すサンプル値系において、各部のサンプリング時点毎の応答(例えば $e^*(t)$, $y^*(t)$)にのみ注目して解析を進める場合には、 z 変換法によるのがはるかに便利であり、一般的である。しかし、一般

* 近藤文治：カットオフオペレータ法によるサンプリングサーボの解法 昭和30年5月 京都大学自動制御研究委員会資料

—1—

にサンプル値系の問題は、サンプリング時点の応答のみに注目していたのでは不十分で、サンプリング時点間の応答、換言すれば制御系の連続応答、例えば図 2.2 における $e(t)$ 、 $y(t)$ 等を知る必要がある場合が多い。このことを最も顕著に示すものが図 2.3 に示す“かげの不安定”、“かげの振動”と呼ばれる現象で、このような応答を示す系に対して、 z 変換を用いて安定判別を行なえば、いずれも安定との結果を得、サンプリング時点間の不都合な振動現象を見落してしまふ。この“かげ”の部分の応答に着目するためには、さきに述べた拡張 z 変換を用いて、系の応答を表現する手段をとる。

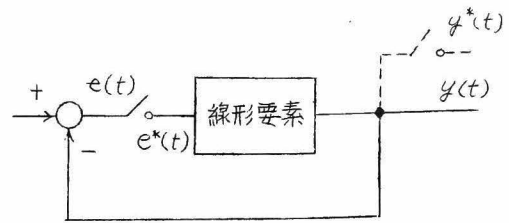


図 2.2 サンプル値系における連続信号と不連続信号

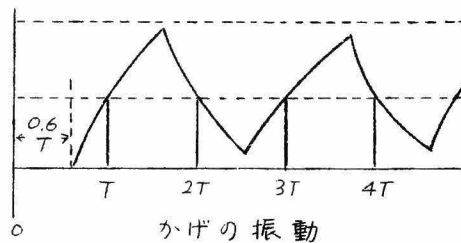
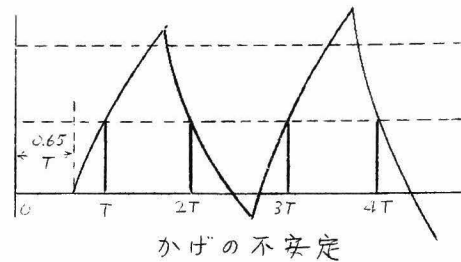


図 2.3 かげの応答

これに対し、カットオフオペレータを用いた解析法においては、本来連続応答に注目した解析法であり、サンプリング時点、サンプリング時点間の応答両者に対し、同一の表現式を用いて考察を進めることができ、さきに述べたようなかげの振動、不安定現象を見落すようなことは起こらない。

カットオフオペレータによる解析法のいま一つの特長は、図 2.4 に示すように、系のゲインがサンプリング周期毎に $K_1, K_2, \dots, K_n, K_1, \dots$ (n : 正整数) なる順で周期的に変化するような可変ゲイン サンプル値系の解析に用いることができることである。このような系の安定判別

法は、後に第2編第6章において述べる非線形サンプル値系における整数次振動（サンプリング周期の整数倍を周期とする非線形振動）の平衡状態の安定判別に应用することができ、

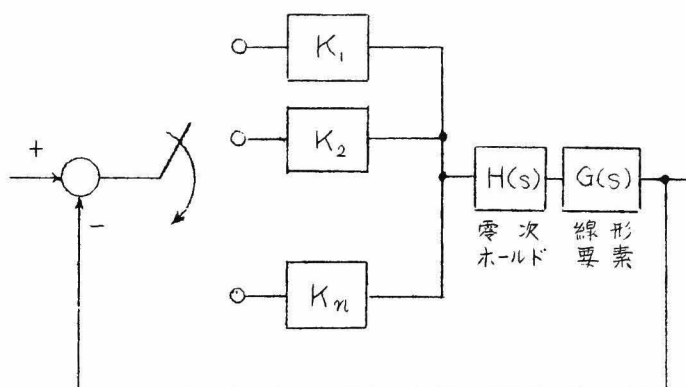


図 2.4 可変ゲイン・サンプル値制御系

本解析法の缺点是 周波数領域での取り扱いができないことである。

2.3 以下に述べる内容は、カットオフオペレータ法によるインデンシャル応答の計算式、および安定判別法であるが 一般入力に対する過渡応答は取り扱う系が非線形特性を含めめかぎり、重畳の理を適用することにより計算可能である。

2 2 カットオフ オペレータ

さて、関数 $f(t)$ の $0 < t < T$ なる期間を切取った関数は、一般に、 $f(t)u(t-T)$ で表わされる。いま $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ 、 $f(t)u(t-T)$ のラプラス変換を形式的に $\mathcal{Q}(T)F(s)$ と表わすものとする。この $\mathcal{Q}(T)$ を $F(s)$ のカットオフオペレータ (Cut off operator) と称する。以上の説明より明らかなように $\mathcal{Q}(T)$ は $F(s)$ に独立に決定することはできず、

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

$$\mathcal{Q}(T)F(s) = \int_0^{\infty} f(t)u(t-T)e^{-st} dt = \int_T^{\infty} f(t)u(t-T)e^{-st} dt \quad (2.2)$$

$$\therefore \Phi(T) = \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt / \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (2.3)$$

すなわち、 $\Phi(T)$ は $F(s)$ に固有のものであり、 $\Phi(T)F(s)$ として、はじめて意味を有するものである。

2.3 柱状サンプリング機構を含むサンプル値系の解析

ここで取りあつかう

サンプル値系は図2.5に示すように目標値入力 $r(t)$ と制御系出力 $y(t)$ との偏差を時間 T 毎に検出し、その値を $T_1 (\leq T)$ の間クランプしたまま、制御対象 $G(s)$ へ操作信号として供給するものであり、図2.6は連続偏差信号と操作信号との関係を示すものである。図に示すように $(k-1)T \leq t < kT$ の期間の

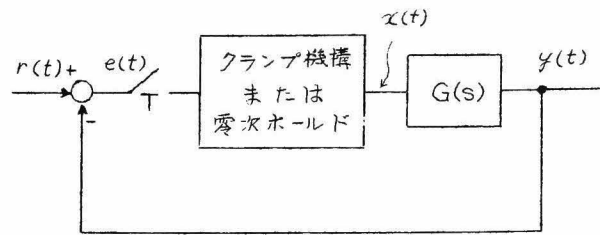


図2.5 柱状サンプリング機構を含むサンプル値系

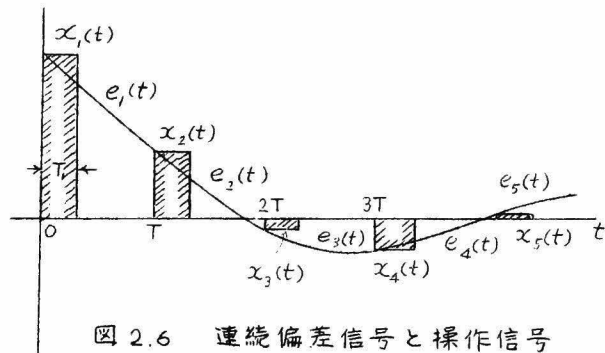


図2.6 連続偏差信号と操作信号との関係

連続偏差信号および制御系出力を $e_k(t)$, $y_k(t)$, 操作信号を $x_k(t)$ とする。ただし、

$$(k-1)T \leq t < (k-1)T + T_1 \text{ に対しては } x_k(t) = x_k = e_k((k-1)T)$$

$$(k-1)T + T_1 \leq t < kT \text{ に対しては } x_k(t) = 0$$

以下、任意のサンプリング期間におけるステップ状入力に対する系の連続信号 $y_k(t)$, $e_k(t)$ および操作信号の大きさ x_k を求める計算式および、この系の安定問題を考える。

(i) $0 \leq t < T$ に対して成立する関係式

$$E_1(s) = R(s) - Y_1(s)$$

$$Y_1(s) = G(s) \frac{x_1(1 - e^{-sT_1})}{s} = R(s) - E_1(s) \quad (2.4)$$

$$x_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s E_1(s)$$

入力 $r(t)$ を単位階段状関数と仮定すると、

$$x_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + G(s)} \equiv \Delta$$

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \left[1 - G(s)(1 - e^{-sT_1}) \Delta \right] \quad (2.5)$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s)(1 - e^{-sT_1}) \Delta$$

ただし、以上の諸式における $R(s)$, $E_1(s)$, $Y_1(s)$ はそれぞれ $r(t)$, $e_1(t)$ および $y_1(t)$ のラプラス変換を意味する。

(2) $T \leq t < 2T$ に対して成立する関係式

$$E_2(s) = E_1(s) - \frac{1}{s} G(s) x_2 e^{-sT}(1 - e^{-sT_1})$$

$$Y_2(s) = R(s) - E_2(s)$$

$$x_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^{-1}[E_1(s)]_{t=T}}{1 + G(s)} = e_1(T) \Delta \quad (2.6)$$

(3) 一般に $(k-1)T \leq t < kT$ の期間に対して成立する関係式、

$$E_k(s) = E_{k-1}(s) - \frac{1}{s} G(s) x_k e^{-(k-1)sT}(1 - e^{-sT_1})$$

$$Y_k(s) = R(s) - E_k(s)$$

$$x_k = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^{-1}[E_{k-1}(s)]_{t=(k-1)T}}{1 + G(s)} = e_{k-1}(\overline{(k-1)T}) \Delta \quad \text{以上(2.7)}$$

(4) 式(2.7)がこの系に対する漸化式である。この式を一般に $G(s)$ が s の多項式の比

$$G(s) \equiv \frac{N(s)}{M(s)} \quad (2.8)$$

で与えられる場合につき解いてみる。なお $M(s) = 0$ の根を m_1, m_2, \dots, m_{n_i} とし、説明を簡単にするため、これらの根には重根、零根を含まないものとする。^{*}

* 重根、零根を含む場合についても容易に拡張することができる。

式(2.5)~(2.7)は式(2.8)および展開定理を使用することによりつぎのように表わすことができる。

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} \frac{1}{m_\ell} \frac{s}{s-m_\ell} \right] \Delta \right. \\ \left. + \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} \frac{1}{m_\ell} \frac{s}{s-m_\ell} \right] e^{-sT_1} \Delta \right\} \quad (2.9)$$

上式の関係はつぎのような行列演算の形に書きかえることができる。

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| + \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} \frac{1}{m_\ell} \frac{s}{s-m_\ell} \right] e^{-sT_1} \Delta \right\} \quad (2.10)$$

ここに $|F_M(s)|$, $|\Delta|$ は各々 1 行 $m+1$ 列および $m+1$ 行 1 列の行列で、

$$|F_M(s)| \equiv \left| \frac{N(0)}{M(0)}, \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} \frac{s}{m_1(s-m_1)}, \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} \frac{s}{m_2(s-m_2)}, \dots \right. \\ \left. \dots \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} \frac{s}{m_m(s-m_m)} \right|$$

$|\Delta| \equiv \left| \Delta, \Delta, \dots, \Delta \right|_t$ ($m+1$ 行, 1 列) 以上(2.11)を表わすものとする, ただし $| \quad |_t$ は転置行列を意味する。

$$\alpha_2 = \left\{ 1 - |F_M(T)| |\Delta| \right\} \Delta \quad (2.12)$$

ただし $|F_M(T)|$ は

$$|F_M(T)| \equiv \left| 0, \frac{N(m_1)(e^{m_1 T} - e^{m_1 T_2})}{M'(m_1) m_1}, \frac{N(m_2)(e^{m_2 T} - e^{m_2 T_2})}{M'(m_2) m_2}, \dots \right. \\ \left. \dots \frac{N(m_m)(e^{m_m T} - e^{m_m T_2})}{M'(m_m) m_m} \right| \quad T_2 = T - T_1 \quad (2.13)$$

$$E_2(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - G(s)(1 - e^{-sT_1}) \Delta - G(s)(1 - e^{-sT_1}) e^{-sT} \alpha_2 \right\} \quad (2.14)$$

式(2.11), (2.12)および(2.13)の諸式を参考にして上式を行列演算の形に直せば、

$$E_2(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| (1 - e^{-sT_1}) - e^{-sT} |F_M(s)| |\Delta| \left[1 - |F_M(T)| |\Delta| \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{s} \left\{ \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)m_\ell} \frac{s}{s-m_\ell} \right] e^{-sT} e^{-sT_1} x_2 \right\} \quad (2.15)$$

$e_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_2(s)]$ は $t \geq T$ に対して定義されたものである。したがって後の計算の便のため、 $\mathcal{P}(T)E_2(s)$ を採用する。式(2.11)より明らかのように $E_2(s)$ は $1/(s-m_k) = \mathcal{L}[e^{m_k t}]$ なる形の項のみより成る。したがって、

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= e^{mt} \quad \text{のとき} \quad F(s) = \frac{1}{s-m} \\ \mathcal{P}(T)F(s) &= \int_T^\infty e^{mt} e^{-st} dt = \frac{1}{s-m} e^{-sT} e^{mT} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\therefore \mathcal{P}(T) = e^{-sT} e^{mT}$$

以上の関係を用いて $\mathcal{P}(T)E_2(s)$ を行列演算の形で表わせば、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(T)E_2(s) &= \frac{e^{-sT}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\varepsilon_1| |\Delta| - |F_M(s)| |\Delta| + |F_M(s)| |M| |\Delta| \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-s(T+T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s-m_\ell} \right] x_2 \\ &= \frac{e^{-sT}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| |\Delta| \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-s(T+T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)m_\ell} \frac{s}{s-m_\ell} \right] x_2 \quad (2.17) \end{aligned}$$

ただし、この式において $|\varepsilon_1|$, $|M|$ および $|\theta_1|$ はつぎに示すような $m+1$ 行 $m+1$ 列の行列を意味する。すなわち、

$$|\varepsilon_1| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (e^{m_1 T} - e^{m_1 T_2}) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (e^{m_m T} - e^{m_m T_2}) \end{vmatrix}$$

$$|M| \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{N(m_1)(e^{m_1 T} - e^{m_1 T_2})}{m_1 M'(m_1)} \Delta & \cdots & \frac{N(m_m)(e^{m_m T} - e^{m_m T_2})}{m_m M'(m_m)} \Delta \\ 0 & \frac{N(m_1)(e^{m_1 T} - e^{m_1 T_2})}{m_1 M'(m_1)} \Delta & \cdots & \frac{N(m_m)(e^{m_m T} - e^{m_m T_2})}{m_m M'(m_m)} \Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N(m_1)(e^{m_1 T} - e^{m_1 T_2})}{m_1 M'(m_1)} \Delta & \cdots & \frac{N(m_m)(e^{m_m T} - e^{m_m T_2})}{m_m M'(m_m)} \Delta \end{vmatrix}$$

$$|\theta_1| \equiv |\varepsilon_1| - |M| \quad \text{以上 (2.18)}$$

更に α_3 を求めれば、

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^{-1}[E_2(s)]_{t=2T}}{1+G(s)} \\ &= \left\{ 1 - \frac{N(0)}{M(0)} \Delta - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} e^{m_\ell T} \Delta - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell) e^{m_\ell T} (e^{m_\ell T} - e^{m_\ell T_2})}{m_\ell M'(m_\ell)} \Delta \right. \\ &\quad + \frac{N(0)}{M(0)} \Delta \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)(e^{m_\ell T} - e^{m_\ell T_2})}{m_\ell M'(m_\ell)} \Delta \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} e^{m_\ell T} \Delta \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)(e^{m_\ell T} - e^{m_\ell T_2})}{m_\ell M'(m_\ell)} \Delta \\ &\quad \left. + \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} e^{m_\ell T_2} \right] \left[1 - |F_M(T)| |\Delta| \right] \Delta \right\} \Delta \end{aligned} \quad (2.19)$$

これを行列演算の形にまとめれば、

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \left\{ 1 - |F_M(T)| |\Delta| - |F_M(T)| \left[|\varepsilon_2| - |M| \right] |\Delta| \right\} \Delta \\ &= \left\{ 1 - |F_M(T)| |\Delta| - |F_M(T)| |\theta_2| |\Delta| \right\} \Delta \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし、上式における $|\varepsilon_2|$, $|\theta_2|$ はいずれも $m+1$ 行 $m+1$ 列の行列でつぎのように表わされる。

$$|\varepsilon_2| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{m_1 T} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & e^{m_m T} \end{vmatrix}, |\theta_2| \equiv |\varepsilon_2| - |M| \quad (2.21)$$

更に $\mathcal{P}(2T)E_3(s)$ について考えれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(2T)E_3(s) &= \frac{e^{-2sT}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\varepsilon_1| |\varepsilon_2| |\Delta| - |F_M(s)| |\varepsilon_1| |\Delta| \right. \\ &\quad + |F_M(s)| |\varepsilon_1| |M| |\Delta| - |F_M(s)| |\Delta| + |F_M(s)| |M| |\Delta| + |F_M(s)| |M| |\varepsilon_2| |\Delta| \\ &\quad \left. - |F_M(s)| |M|^2 |\Delta| \right\} + \frac{e^{-s(2T+T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s-m_\ell} \right] \mathcal{X}_3 \\ &= \frac{e^{-2sT}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| - |F_M(s)| [|\varepsilon_1| - |M|] |\Delta| \right. \\ &\quad \left. - |F_M(s)| [|\varepsilon_1| |\varepsilon_2| - |\varepsilon_1| |M| - |M| |\varepsilon_2| + |M|^2] |\Delta| \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-s(2T+T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s-m_\ell} \right] \mathcal{X}_3 \quad (2.22) \end{aligned}$$

ところが、

$$|\varepsilon_1| |\varepsilon_2| - |\varepsilon_1| |M| - |M| |\varepsilon_2| + |M|^2 = [|\varepsilon_1| - |M|] [|\varepsilon_2| - |M|] = |\theta_1| |\theta_2| \quad (2.23)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(2T)E_3(s) &= \frac{e^{-2sT}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| |\theta_2| |\Delta| \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-s(2T+T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s-m_\ell} \right] \mathcal{X}_3 \quad (2.24) \end{aligned}$$

以下のサンプリング時点間の連続応答、サンプリング時点における操作信号については同様の過程が繰り返されるにすぎず、したがって一般に $(k-1)T \leq t < kT$ の期間に対する連続偏差信号 $E_k(s)$ 、サンプリング時点 $t=kT$ における操作信号値 \mathcal{X}_k はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} x_k &= \left\{ 1 - |F_M(T)| |\Delta| - |F_M(T)| |\theta_2| |\Delta| - \dots - |F_M(T)| |\theta_2|^{k-2} |\Delta| \right\} \Delta \\ &= \left\{ 1 - |F_M(T)| \left[|U| - |\theta_2| \right] \left[|U| - |\theta_2| \right]^{-1} |\Delta| \right\} \Delta \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{k-1}T) E_k(s) &= \frac{e^{-s(k-1)T}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| |\Delta| \right. \\ &\quad \left. - |F_M(s)| |\theta_1| |\theta_2| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| |\theta_2|^2 |\Delta| - \dots - |F_M(s)| |\theta_1| |\theta_2|^{k-2} |\Delta| \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-s(\overline{k-1}T + T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s - m_\ell} \right] x_k \\ &= \frac{e^{-s(k-1)T}}{s} \left\{ 1 - |F_M(s)| |\Delta| - |F_M(s)| |\theta_1| \left[|U| - |\theta_2| \right] \left[|U| - |\theta_2| \right]^{-1} |\Delta| \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-s(\overline{k-1}T + T_1)}}{s} \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} \frac{s}{s - m_\ell} \right] x_k \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

上式における $|U|$ は $m+1$ 行 $m+1$ 列の単位行列である。

式(2.26)の逆変換を求め、かつ時間原点を $(k-1)T$ に移した局所時間 $t' (0 \leq t' < T)$ を用いて表わせば、

$$\begin{aligned} e_k(t') &= \left\{ 1 - |f_M(t')| |\Delta| - |f_M(t')| |\theta_1| \left[|U| - |\theta_2| \right] \left[|U| - |\theta_2| \right]^{-1} |\Delta| \right\} u(t') \\ &\quad + \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} e^{m_\ell t'} e^{-m_\ell T_1} \right] x_k u(t' - T_1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ただし $|f_M(t')|$ は 1 行 $m+1$ 列の行列でつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} |f_M(t')| &\equiv \left| \frac{N(0)}{M(0)} \frac{N(m_1)}{m_1 M'(m_1)} e^{m_1 t'} \frac{N(m_2)}{m_2 M'(m_2)} e^{m_2 t'} \dots \frac{N(m_m)}{m_m M'(m_m)} e^{m_m t'} \right| \\ t &= (k-1)T + t' \quad 0 \leq t' < T \end{aligned} \quad \text{以上 (2.28)}$$

(5) 過渡応答波形の算出および安定判別

式(2.25)および(2.26)に含まれる $|\theta_2|^{k-1}$ なる行列のベキの計算は $|\theta_2|$ の特有方程式 (characteristic equation)

$$\det [\lambda |U| - |\theta_2|] = 0 \quad (2.29)$$

の根(特有根) $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ を求めることによりシルベスター (Sylvester) の定理

$$|\theta_2|^{k-1} = \sum_r \lambda_r^{k-1} \frac{\prod_{\substack{s=1,2,\dots,m+1 \\ s \neq r}} (\lambda_s |U| - |\theta_2|)}{\prod_{\substack{s=1,2,\dots,m+1 \\ s \neq r}} (\lambda_s - \lambda_r)} \quad (2.30)^*$$

を用いて行なうことができる。また $k \rightarrow \infty$ における値、すなわち系の定常状態を知るには $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ のうち絶対値最大のものを λ_1 とすれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\theta_2|^{k-1} = \lambda_1^\infty \frac{\prod_{s=2,3,\dots,m+1} (\lambda_s |U| - |\theta_2|)}{\prod_{s=2,3,\dots,m+1} (\lambda_s - \lambda_1)} \quad (2.31)$$

となり、絶対値 $\lambda_1 < 1$ のときは行列の全要素がゼロの零行列、絶対値 $\lambda_1 > 1$ のときには無限大の要素を含むものになり、絶対値 $\lambda_1 = 1$ の場合には k の値によって各要素の値が変化する。したがって絶対値 $\lambda_1 < 1$ のときのみ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t')$ は有界の値を有し 各々 つぎのように表わされる。すなわち、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left\{ 1 - |F_M(T)| \left[|U| - |\theta_2| \right]^{-1} |\Delta| \right\} \Delta \quad (2.32)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t') = \left\{ 1 - |f_M(t')| |\Delta| - |f_M(t')| |\theta_1| \left[|U| - |\theta_2| \right]^{-1} |\Delta| \right\} u(t')$$

$$+ \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{m_\ell M'(m_\ell)} e^{m_\ell t'} e^{-m_\ell T_1} \right] \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) u(t' - T_1)$$

(2.33)

以上の説明から明らかなように、系が安定なるためには、行列 θ_2 の特有方程式 (2.29) の根の絶対値のすべてが 1 より小なることが必要である。すなわち、図 2.7 (a) に示すように特有方程式の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

* ここでは簡単のため、 $\lambda_1 \sim \lambda_{m+1}$ は重根を含まないものとした。林重憲、演算子法と過渡現象 p.79 国民科学社 昭和24年春版

$2T), \dots$ に変換し、後続要素 $G(s)$ へ伝達するもので、普通前述のZ変換法、インパルス変調法によるサンプル値系の取りあつかいにおいてはサンプリング機構はすべてこのような動作をするものとしている。ただし $\delta(t-kT)$ は $t=kT$

の瞬間、発生する単位インパルス関数（デルタ関数）である。図 2.9 は連続偏差信号とサンプリングインパルス列との関係を模形的に表わしたものである。以下、

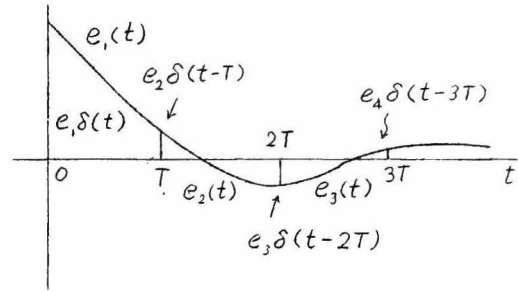


図 2.9 連続偏差信号と操作信号との関係

簡単のため目標値入力 $r(t)$

がやはり単位ステップ関数である場合につき、各サンプリング時点におけるサンプリングパルスの大きさ e_k 、任意のサンプリング時点間 $(k-1)T \leq t < T$ の期間における連続偏差 $e_k(t)$ の計算式、および安定判別法につき考える。

(1) $0 \leq t < T$ に対して成立する関係式

$$E_1(s) = R(s) - Y_1(s) \quad (2.35)$$

$$Y_1(s) = G(s) \mathfrak{L}[e_1 \delta(t)] = G(s) e_1$$

$$e_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s E_1(s)$$

入力 $r(t)$ を単位段階状関数と仮定すれば、

$$e_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + sG(s)} \equiv \Delta_0$$

$$E_1(s) \frac{1}{s} [1 - sG(s) \Delta_0] \quad (2.36)$$

$$Y_1(s) = G(s) \Delta_0$$

(2) $T \leq t < 2T$ に対して成立する関係式

$$E_2(s) = E_1(s) - G(s) \mathfrak{L}[e_2 \delta(t-T)] = E_1(s) - G(s) e_2 e^{-sT}$$

$$Y_2(s) = R(s) - E_2(s) \quad (2.37)$$

$$e_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^{-1}[E_1(s)]_{t=T}}{1 + sG(s)} = e_1(T)\Delta_0$$

(3) 一般に $(k-1)T \leq t < kT$ の期間に対して成立する関係式

$$E_k(s) = E_{k-1}(s) - G(s) \mathcal{L}[e_k \delta(t - \overline{k-1}T)] = E_{k-1}(s) - G(s)e_k e^{-s\overline{k-1}T}$$

$$Y_k(s) = R(s) - E_k(s) \quad (2.38)$$

$$e_k = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^{-1}[E_{k-1}(s)]_{t=(k-1)T}}{1 + sG(s)} = e_{k-1}(\overline{k-1}T)\Delta_0$$

(4) 式(2.38)がこの場合に対する漸化式である。この式を前と同様一般に $G(s)$ が s の多項式の比、式(2.8)で与えられる場合について解いてみる。

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} \frac{s}{s-m_\ell} \Delta_0 \right] \quad (2.39)$$

前の場合と同じく行列演算の形にかきかえると、

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - |F_{M0}(s)| |\Delta_0| \right\} \quad (2.40)$$

ここに $|F_{M0}(s)|$, $|\Delta_0|$ は各々 1 行 m 列、および m 行 1 列の行列で柱状(または階段状)サンプリング機構の場合の行列、式(2.11)と類似な形を有する。すなわち、

$$|F_{M0}(s)| \equiv \left| \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} \frac{s}{s-m_1}, \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} \frac{s}{s-m_2}, \dots, \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} \frac{s}{s-m_m} \right|$$

$$|\Delta_0| \equiv \left| \Delta_0, \Delta_0, \dots, \Delta_0 \right|_t \quad (m \text{ 行 } 1 \text{ 列}) \quad (2.41)$$

$$e_1 = \left\{ 1 - |F_{M0}(T)| |\Delta_0| \right\} \Delta_0$$

ここに $|F_{M0}(T)|$ は $|F_{M0}(s)|/s$ の逆ラプラス変換において、 $t=T$ とおいたものを各要素とする 1 行 m 列の行列でつぎのようになる、

$$|F_{M0}(T)| \equiv \left| \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} e^{m_1 T}, \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} e^{m_2 T}, \dots, \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} e^{m_m T} \right|$$

(2.42)

$$P(T)E_2(s) = \frac{e^{-sT}}{s} \left\{ 1 - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} e^{m_\ell T} \frac{s}{s - m_\ell} \Delta_0 \right. \\ \left. - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} \frac{s}{s - m_\ell} \Delta_0 \left[1 - \sum_{\ell=1}^m \frac{N(m_\ell)}{M'(m_\ell)} e^{m_\ell T} \Delta_0 \right] \right\} \quad (2.43)$$

やはり行列演算の形で表わせば、

$$P(T)E_2(s) = \frac{e^{-sT}}{s} \left\{ 1 - |F_{M_0}(s)| |\Delta_0| - |F_{M_0}(s)| |\theta_0| |\Delta_0| \right\} \quad (2.44)$$

ここに

$$|\theta_0| \equiv \begin{bmatrix} |\varepsilon_0| & -|M_0| \end{bmatrix}$$

$$|\varepsilon_0| \equiv \begin{vmatrix} e^{m_1 T} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{m_2 T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{m_m T} \end{vmatrix}$$

$$|M_0| \equiv \begin{vmatrix} \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} e^{m_1 T} \Delta_0, & \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} e^{m_2 T} \Delta_0, & \cdots, & \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} e^{m_m T} \Delta_0 \\ \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} e^{m_1 T} \Delta_0, & \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} e^{m_2 T} \Delta_0, & \cdots, & \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} e^{m_m T} \Delta_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N(m_1)}{M'(m_1)} e^{m_1 T} \Delta_0, & \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} e^{m_2 T} \Delta_0, & \cdots, & \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} e^{m_m T} \Delta_0 \end{vmatrix}$$

(m 行 m 列) 以上 (2.45)

$$e_3 = \left\{ 1 - |F_{M_0}(T)| |\Delta_0| - |F_{M_0}(T)| |\theta_0| |\Delta_0| \right\} \Delta_0 \quad (2.46)$$

以下同様の過程が繰返し行われるにすぎず、したがって、 $t = kT$ に
おけるサンプリングパルスの大きさ e_k 、 $(k-1)T \leq t < kT$ なる期間

における連続偏差信号のラプラス変換 $\mathcal{P}(\overline{k-1}T) E_k(s)$ はつぎの関係で与えられる。

$$\begin{aligned} e_k &= \{ 1 - |F_{M0}(T)| |\Delta_0| - |F_{M0}(T)| |\theta_0| |\Delta_0| - |F_{M0}(T)| |\theta_0|^2 |\Delta_0| - \dots \\ &\quad \dots - |F_{M0}(T)| |\theta_0|^{k-2} |\Delta_0| \} \Delta_0 \\ &= \{ 1 - |F_{M0}(T)| \left[|U| - |\theta_0|^{k-1} \right] \left[|U| - |\theta_0| \right]^{-1} |\Delta_0| \} \Delta_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

ここに $|U|$ は m 行 m 列の単位行列を意味する。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\overline{k-1}T) E_k(s) &= \frac{e^{-s(k-1)T}}{s} \left\{ 1 - |F_{M0}(s)| |\Delta_0| - |F_{M0}(s)| |\theta_0| |\Delta_0| \right. \\ &\quad \left. - |F_{M0}(s)| |\theta_0|^2 |\Delta_0| - \dots - |F_{M0}(s)| |\theta_0|^{k-1} |\Delta_0| \right\} \\ &= \frac{e^{-s(k-1)T}}{s} \left\{ 1 - |F_{M0}(s)| \left[|U| - |\theta_0|^k \right] \left[|U| - |\theta_0| \right]^{-1} |\Delta_0| \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

上式の逆変換を求め、かつ時間原点を $(k-1)T$ に移した局部時間 t' ($0 < t' < T$) を用うれば、

$$e_k(t') = \left\{ 1 - |f_{M0}(t')| \left[|U| - |\theta_0|^k \right] \left[|U| - |\theta_0| \right]^{-1} |\Delta_0| \right\} \quad (2.49)$$

ここに $|f_{M0}(t')|$ は 1 行 m 列の行列で $\mathcal{L}^{-1} \left[|F_{M0}(s)| / s \right]$ に等しい。

$$\begin{aligned} |f_{M0}(t')| &\equiv \left[\frac{N(m_1)}{M'(m_1)} e^{m_1 t'}, \frac{N(m_2)}{M'(m_2)} e^{m_2 t'}, \dots, \frac{N(m_m)}{M'(m_m)} e^{m_m t'} \right] \\ t &= (k-1)T + t' \quad 0 < t' < T \end{aligned} \quad \text{以上 (2.50)}$$

(5) 過渡応答波形の算出および安定判別

式 (2.48) および (2.50) に含まれる $|\theta_0|^k$ の計算はやはりシルベスターの定理を用うることにより計算することができる。また安定判別は $|\theta_0|$ の特有方程式

$$\det [\lambda |U| - |\theta_0|] = 0 \quad (2.51)$$

の固有根 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ を吟味することにより容易に行なうことができる。すなわち系が安定なるためには $\lambda_1 \sim \lambda_m$ の絶対値がすべてより小でなくてはならない。この場合、 $e_k, e_k(t)$ の定常状態における値は、柱状サンプリング機構の場合と同様の理由からつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k &= \left\{ 1 - |F_{NO}(T)| \left[|U| - |\theta_0| \right]^{-1} |\Delta_0| \right\} \Delta_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t') &= 1 - |f_{MO}(t')| \left[|U| - |\theta_0| \right]^{-1} |\Delta_0| \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.5 安定判別計算例

簡単な例として図 2.10 に示すサンプル値フィードバック系の安定判別を、カットオフオペレータ法による解析法およびZ変換法による解析法両者により行い、その結果を比較する。

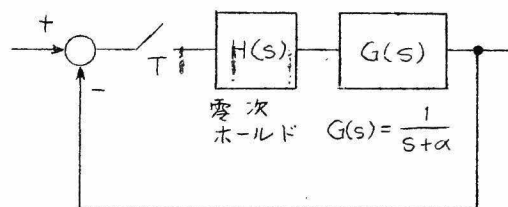


図 2.10 サンプル値系の例 (純パルスサンプリング + 零次ホールド)

本例は純パルスサンプリング機構の後に零次ホールド回路を有するもので、したがってサンプリング機構が柱状サンプリング動作を行なう場合の公式において、 $T_1 = T$ ($T_2 = 0$) とおくことにより計算することができる。

この場合の安定判別に使用する特有方程式は式 (2.29) で与えられる。すなわち、

$$\det [\lambda |U| - |\theta_0|] = 0$$

行列 $|\theta_0|$ は式 (2.23) より、

$$|\theta_0| = |\varepsilon_2| - |M|$$

また $|\varepsilon_2|$ および $|M|$ は式 (2.21) および (2.18) で計算されるから、

この場合

$$|\varepsilon_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha T} \end{vmatrix} \quad |M| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \Delta \\ 0 & \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \Delta \end{vmatrix} \quad (2.53)$$

また式(2.5)より

$$\Delta = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1+G(s)} = 1 \quad (2.54)$$

したがって、

$$|\theta_2| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \\ 0 & \frac{\alpha e^{-\alpha T}+e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \end{vmatrix} \quad (2.55)$$

したがって

$$\begin{aligned} & \det [\lambda |U| - |\theta_2|] \\ &= \det \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 0 & \lambda - \frac{\alpha e^{-\alpha T}+e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda - \frac{\alpha e^{-\alpha T}+e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

特有根は

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha e^{-\alpha T}+e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \quad (2.57)$$

したがって安定条件は

$$\left| \frac{\alpha e^{-\alpha T}+e^{-\alpha T}-1}{\alpha} \right| < 1 \quad || : \text{絶対値} \quad (2.58)$$

つぎに同じ問題をZ変換法によりとりあつかってみると式(1.8)より、

$$Z[G(s)H(s)] = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{1}{s(s+\alpha)}\right] \quad (2.59)$$

式 (1.6) より

$$Z [G(s)H(s)] = \frac{(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha(z - e^{-\alpha T})} \quad (2.60)$$

特性方程式は

$$1 + Z [G(s)H(s)] = 0 \quad (2.61)$$

したがって、この場合には

$$\frac{\alpha z - \alpha e^{-\alpha T} + 1 - e^{-\alpha T}}{\alpha(z - e^{-\alpha T})} = 0 \quad (2.62)$$

上式の根 z がすべて z 平面の単位円内にあればその系は安定である。すなわち、

$$|z| = \left| \frac{\alpha e^{-\alpha T} + e^{-\alpha T} - 1}{\alpha} \right| < 1 \quad (2.63)$$

式 (2.58) と (2.63) を比較すれば明らかなように両解析結果は一致する。

更にいま 1 つの例として、図 2.11 に示すように零次ホールドを伴わないサンプル値系について考える。

安定判別を行うのに用うる特有方程式はこの場合、式 (2.51) で与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} \det [\lambda |U| - | \theta_0 |] &= 0 \\ | \theta_0 | &\text{ は式 (2.52) より、} \\ | \theta_0 | &= | \varepsilon_0 | - | M_0 | \\ &= | e^{-\alpha T} | - | e^{-\alpha T} | \Delta_0 = e^{-\alpha T} (1 - \Delta_0) \end{aligned} \quad (2.64)$$

また、式 (2.36) より、

$$\Delta_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + sG(s)} = \frac{1}{2} \quad (2.65)$$

したがって、特有方程式は、

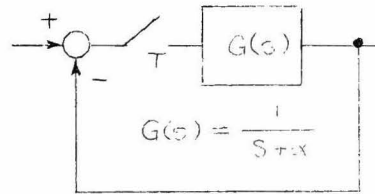


図 2.11 サンプル値系の例
(純パルスサンプリング)

$$\lambda - \frac{e^{-T}}{2} = 0 \quad (2.66)$$

安定条件は

$$\left| \frac{e^{-\alpha T}}{2} \right| < 1 \quad (2.67)$$

z 変換法により安定条件^件を求めると、

$$Z[G(s)] = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \quad (2.68)$$

特性方程式は

$$\frac{z - e^{-\alpha T}}{z - e^{-\alpha T}} = 0 \quad (2.69)$$

したがって安定条件は式(2.67)と同じく

$$|z| = \left| \frac{e^{-\alpha T}}{2} \right| < 1 \quad (2.70)$$

第3章 有限整定時間応答系における整定 サンプリング回数の一短縮法

3.1 Jury および Schroeder の有限整定時間応答系の設計法

通常、連続制御系では、少くとも理論的には過渡応答は $t \rightarrow \infty$ において定常値に落着く。しかるにサンプル値制御系では、序に示したサンプル値系における制御装置を適当に設計すると、その過渡応答は有限時間のうちに定常状態に落着き、しかも定常偏差を生じないようにすることができる。このような補償の行われた系を有限整定時間応答系といい、リレー制御系における最適切換問題などと類似なサンプル値系における最適制御の一つとして、各方面において研究が行われている。

さて有限整定時間応答系において、目標とする最適化の対象としては規定入力に対する過渡応答を有限時間で終わらせること、整定に要するサンプリング回数をできるだけ短縮すること、ならびに整定に到るまでの過渡応答を良好にすることなどがあげられる。本章においては、この整定サンプリング回数を短縮する一方法（マルチルート方式と仮称）について述べるものである。

これに先立ち、本章 3.1 においては 3.2 に説明するマルチルート方式による整定時間短縮法において行う操作が、どのような意味を有するかの理解を助けるため、有限整定時間応答系の設計の基本となる Eliahu I. Jury および William Schroeder により提唱された有限整定時間応答系の設計法の概略を紹介し^{*}、その整定サンプリング回数が系の次数によってどのように決定されるかについて説明する。

次頁図 3.1 (a) に示すサンプル値フィードバック制御系において、制御系出力、すなわち制御量 $y(t)$ の伝張 z 変換 $Y^*(z, m)$ はつぎのよう

* E. I. Jury and W. Schroeder : Discrete Compensation of Sampled-data and Continuous Control Systems, Trans. AIEE., Vol. 75, Pt. II, pp. 317~325 (1956)

に表わすことができる。

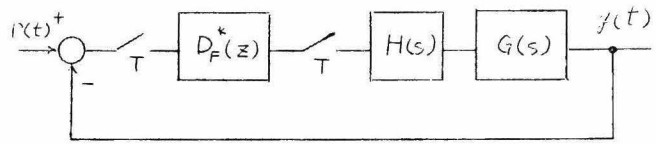
$$Y^*(z, m) = \frac{Z_m[G(s)H(s)] D_F^*(z)}{1 + Z^*[G(s)H(s)] D_F^*(z)} R^*(z) = Z_m[G(s)H(s)] D^*(z) R^*(z) \quad (3.1)$$

ただし

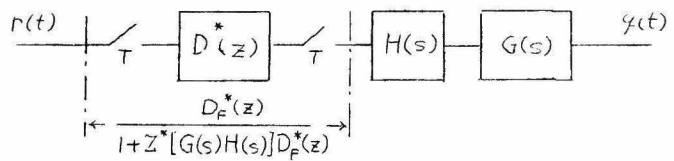
$$D^*(z) = \frac{D_F^*(z)}{1 + Z^*[G(s)H(s)] D_F^*(z)} \quad (3.2)$$

$D^*(z)$ は図(b)

より明らかなように (a) に示したフィードバック系を開ループ系に等価変換したもので、これを開ループ等価制御装置と仮称する。



(a)



(b)

図 3.1 制御装置 $D_F^*(z)$ の開ループ制御装置 $D^*(z)$ への等価変換

$Y^*(z, m)$ より
制御量の時々刻々の

値 $f(t)$ を知るには、式 (3.1) に対し、逆 z 変換 (real inversion) 公式、

$$f(nm) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} Y^*(z, m) z^{n-1} dz \quad (3.3)$$

の関係により、 $n = 1, 2, \dots$ とおいたときの被積分関数 $Y^*(z, m) z^{n-1}$ の留数の和を計算することにより容易に行なうことができる。ここに Γ は被積分関数の特異点のすべてをその内部に包含するような閉曲線である。

時間 t と n および m の間の関係は、

$$t = (n-1)T + mT \quad (3.4)$$

$$(n = 1, 2, \dots; \quad m = 0 \sim 1)$$

で表わされ、図 3.2 に示すようになる。

いまもし、 $G(s)$ が一般に、

$$G(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_p s^p}{s^p (b_0 + b_1 s + \dots + b_\ell s^\ell)} \quad (3.5)$$

で与えられるものとする。

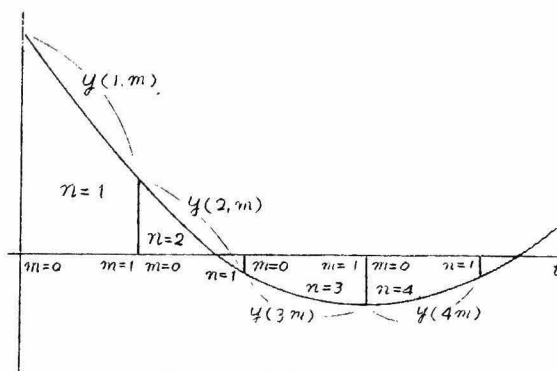


図 3.2 拡張Z変換と“かけ”の応答

$$Z_m^* [G(s)H(s)] = C \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{(z-1)^{p+1}} + \frac{\phi_p(m)}{(z-1)^p} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\phi_1(m)}{z-1} + \frac{\psi(z, m)}{\prod_{i=1}^{\ell} (z-r_i)} \right] \quad (3.6)$$

となる。

このとき、たとえば目標値入力 $r(t)$ として単位階段状入力、すなわち、

$$R^*(z) = \frac{z}{z-1} \quad (3.7)$$

を加えた場合、開ループ等価制御装置 $D^*(z)$ を

$$D^*(z) = \frac{(z-1)^p \prod_{i=1}^{\ell} (z-r_i)}{C \prod_{i=1}^{\ell} (1-r_i) z^{p+\ell}} \quad (3.8)$$

とすればならば、そのときの系の応答 $Y^*(z, m)$ は、

$$Y^*(z, m) = \frac{\prod_{i=1}^{\ell} (z-r_i)}{\prod_{i=1}^{\ell} (1-r_i) z^{p+\ell} (z-1)} + \frac{\phi_p(m) \prod_{i=1}^{\ell} (z-r_i)}{\prod_{i=1}^{\ell} (1-r_i) z^{p+\ell}} + \dots + \frac{\phi_1(m) (z-1)^{p-1} \prod_{i=1}^{\ell} (z-r_i)}{\prod_{i=1}^{\ell} (1-r_i) z^{p+\ell}} \\ + \frac{\psi(z, m) (z-1)^p}{\prod_{i=1}^{\ell} (1-r_i) z^{p+\ell}} \quad (3.9)$$

と表わされる。この結果に対し式(3.3)の逆 z 変換公式を適用することにより

$$n \geq p + l + 1 \quad (3.10)$$

すなわち、 $[G(s)$ の次数 $+1$]以後 $y(nm)$ は n および m に無関係に1(単位ステップの大きさ)となり、目標値に定常位置偏差なく一致することがわかる。

以上の説明より明らかなように、整定サンプリング回数は目標値入力がステップ状の場合には $[G(s)$ の次数 $+1$]よりも短かくすることはできない。

上に述べた方法は、ステップ状入力に対し制御量をサンプリング時点およびサンプリング時点間の応答共に有限整定させるものであったが、この他、ランプ状入力や更に高次の入力に対する設計法、サンプル点のみにおいて有限整定させる方法が多くの研究者により発表されている。

3.2 マルチ・ルート方式による整定回数の短縮法

以上、3.1で説明したように、サンプル値系における最適制御の1つである有限整定時間応答系において、その最適性能の1つの尺度である整定時間は、整定に要するサンプリング回数(整定回数と略称)および1回のサンプリングに要する時間、すなわちサンプリング周期で決定される。このうち後者、サンプリング周期は序文で述べたように、その系で取りあつかう信号の性質に応じて、サンプリング定理等を目安にして決定されることが多く、また理論的にはいくらでもサンプリング周期を短かく送ることができる場合においても、あまりこれを短かくすると後に第Ⅱ編において述べるように、系に用いられる制御装置出力に過大なものが要求されるようになり、飽和の現象により有限整定の特性が失なわれたり、過渡応答に好ましくない振動を生じたりする。一方サンプリング回数が制限をうけることはすでに3.1で述べたとおりである。

サンプリング周期短縮による飽和の問題は第Ⅱ編にゆづることとし、ここでは整定回数を短縮する一方法につき説明する。ただし、この方法

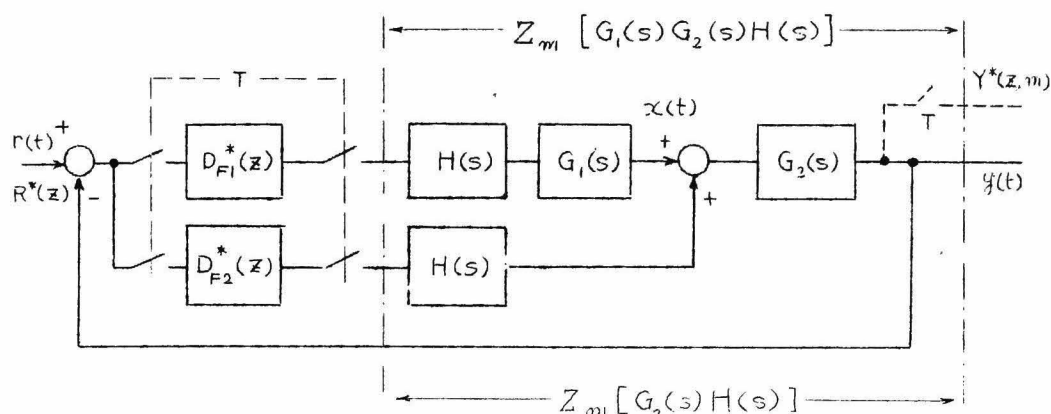


図 3.3 マルチ ルート・サンプル 恒制御系

は図 3.3 に示すように前向き回路制御対象の途中に操作信号を加えることができるような特殊な場合であって、主としてプロセス制御関係において利用可能の制御方式と考える。

3.2.1 基本式

図 3.3 より、

$$Y^*(z, m) = Z_{m1} [G_1(s) G_2(s) H(s)] D_{F1}^*(z) E^*(z) + Z_{m1} [G_2(s) H(s)] D_{F2}^*(z) E^*(z) \quad (3.11)$$

$$X^*(z, m) = Z_{m1} [G_1(s) H(s)] D_{F1}^*(z) E^*(z) \quad (3.12)$$

$$E^*(z) = \frac{R^*(z)}{1 + Z^* [G_1(s) G_2(s) H(s)] D_{F1}^*(z) + Z^* [G_2(s) H(s)] D_{F2}^*(z)} \quad (3.13)$$

ただし、これらの式における $Z_{m1} [F(s)]$, $Z [F(s)]$ は $F(s)$ の拡張 z 変換および z 変換を意味する。いま

$$D_1^*(z) \equiv \frac{D_{F1}^*(z)}{1 + Z [G_1(s) G_2(s) H(s)] D_{F1}^*(z) + Z [G_2(s) H(s)] D_{F2}^*(z)}$$

$$D_2^*(z) \equiv \frac{D_{F2}^*(z)}{1 + Z [G_1(s) G_2(s) H(s)] D_{F1}^*(z) + Z [G_2(s) H(s)] D_{F2}^*(z)} \quad (3.14)$$

とおけば、

$$Y^*(z, m) = Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)] D_1^*(z) R^*(z) + Z_m [G_2(s) H(s)] D_2^*(z) R^*(z) \quad (3.15)$$

$$X^*(z, m) = Z_m [G_1(s) H(s)] D_1^*(z) R^*(z) \quad (3.16)$$

$$C_1^*(z) = D_{F1}^*(z) E^*(z) = D_1^*(z) R^*(z) \quad (3.17)$$

$$C_2^*(z) = D_{F2}^*(z) E^*(z) = D_2^*(z) R^*(z) \quad (3.18)$$

いま $G_1(s)$ $G_2(s)$, $H(s)$ がそれぞれ、つぎのように与えられるものとする。

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{s^r (s+a_1)(s+a_2) \cdots (s+a_u)}$$

$$G_2(s) = \frac{N_2(s)}{s^w (s+b_1)(s+b_2) \cdots (s+b_v)} \quad (3.19)$$

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

この場合、 $Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)]$, $Z_m [G_2(s) H(s)]$ を求めれば、

$$\begin{aligned} Z_m^{-1} [G_1(s) G_2(s) H(s)] &= \frac{z^{-1}}{z} Z_m [G_1(s) G_2(s) / s] \\ &= \frac{z^{-1}}{z} \left\{ \frac{1}{(r+w)!} \sum_{i=0}^{r+w} \binom{r+w}{i} \left(\frac{d^{r+w-i}}{ds^{r+w-i}} G_1(s) G_2(s) s^{r+w} \right) \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (mT)^{i-k} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0} \left. + \sum_{j=1}^u \frac{1}{(-a_j)} \left[G_1(s)(s+a_j) \right]_{s \rightarrow -a_j} G_2(-a_j) \frac{e^{-a_j mT}}{z - e^{-a_j T}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^v \frac{1}{(-b_l)} \left[G_2(s)(s+b_l) \right]_{s \rightarrow -b_l} G_1(-b_l) \frac{e^{-b_l mT}}{z - e^{-b_l T}} \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} Z_m^{-1} [G_2(s) H(s)] &= \frac{z^{-1}}{z} Z_m [G_2(s) / s] \\ &= \frac{z^{-1}}{z} \left\{ \frac{1}{w!} \sum_{i=0}^w \binom{w}{i} \left(\frac{d^{w-i}}{ds^{w-i}} G_2(s) s^w \right) \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (mT)^{i-k} \left(\frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_{\ell})} \left[G_2(s)(s+b_{\ell}) \right]_{s=-b_{\ell}} \frac{e^{-b_{\ell} mT}}{z - e^{-b_{\ell} T}} \left\} \quad (3.21)$$

式(3.20), (3.21)の一部(原点多重極の部分)に行列表示を用うれば,

$$Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)]$$

$$= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{(r+w)!} |A_1| |\theta_1| |B_1| + \frac{1}{(r+w)!} |A_2| |\theta_2| |B_1| + \frac{1}{(r+w)!} |A_3| |\theta_3| |B_2| \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^u \frac{1}{(-a_j)} \left[G_1(s)(s+a_j) \right]_{s=-a_j} G_2(-a_j) \frac{e^{-a_j mT}}{z - e^{-a_j T}}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_{\ell})} \left[G_2(s)(s+b_{\ell}) \right]_{s=-b_{\ell}} G_1(-b_{\ell}) \frac{e^{-b_{\ell} mT}}{z - e^{-b_{\ell} T}} \left\} \quad (3.22)$$

$$Z_m [G_2(s) H(s)] = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{w!} |A_3| |\theta_4| |B_3| + \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_{\ell})} \left[G_2(s)(s+b_{\ell}) \right]_{s=-b_{\ell}} \frac{e^{-b_{\ell} mT}}{z - e^{-b_{\ell} T}} \right\}$$

(3.23)

ここに

$$|A_1| \equiv \left| \binom{r+w}{0} P(0)^{(r+w)}, \binom{r+w}{1} P(0)^{(r+w-1)}, \dots, \binom{r+w}{r-1} P(0)^{(w+1)} \right|$$

$$|A_2| \equiv \left| \binom{r+w}{r} P(0)^{(w)}, \binom{r+w}{r+1} P(0)^{(w-1)}, \dots, \binom{r+w}{r+w} P(0)^{(0)} \right|$$

$$|A_3| \equiv \left| \binom{w}{0} Q(0)^{(w)}, \binom{w}{1} Q(0)^{(w-1)}, \dots, \binom{w}{w} Q(0)^{(0)} \right|$$

$$|\theta_1| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} mT & 1 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} (mT)^2 & \binom{2}{1} mT & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{r-1}{0} (mT)^{r-1} & \binom{r-1}{1} (mT)^{r-2} & \dots & \binom{r-1}{r-2} mT, & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\theta_2| \equiv \begin{vmatrix} \binom{r}{0}(mT)^r, & \binom{r}{1}(mT)^{r-1} & \cdots & \binom{r}{r-1}mT \\ \binom{r+1}{0}(mT)^{r+1}, & \binom{r+1}{1}(mT)^r & \cdots & \binom{r+1}{r-1}(mT)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r+w}{0}(mT)^{r+w}, & \binom{r+w}{1}(mT)^{r+w-1} & \cdots & \binom{r+w}{r-1}(mT)^{w+1} \end{vmatrix}$$

$$|\theta_3| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{r+1}{r}mT & 1 & \cdots & 0 \\ \binom{r+2}{r}(mT)^2 & \binom{r+2}{r+1}mT & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r+w}{r}(mT)^w & \binom{r+w}{r+1}(mT)^{w-1} & \cdots & \binom{r+w}{r+w-1}mT \end{vmatrix}$$

$$|\theta_4| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0}mT & 1 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0}mT^2 & \binom{2}{1}mT & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{w}{0}(mT)^w & \binom{w}{1}(mT)^{w-1} & \cdots & \binom{w}{w-1}mT \end{vmatrix}$$

ただし

$$P(0)^{(h)} \equiv \frac{d^h}{ds^h} \left[G_1(s) G_2(s) s^{r+w} \right]_{s \rightarrow 0}$$

$$Q(0)^{(h)} \equiv \frac{d^h}{ds^h} \left[G_2(s) s^w \right]_{s \rightarrow 0}$$

$$|B_1| \equiv \left| \frac{1}{z-1}, \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{z-e^{st}} \right)_{s \rightarrow 0}, \cdots, \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} \left(\frac{1}{z-e^{st}} \right)_{s \rightarrow 0} \right|_t$$

$$|B_2| \equiv \left| \frac{d^r}{ds^r} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}, \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}, \dots, \frac{d^{r+w}}{ds^{r+w}} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0} \right|_t$$

$$|B_3| \equiv \left| \frac{1}{z-1}, \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}, \dots, \frac{d^w}{ds^w} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0} \right|_t$$

以上 (3.24)

以下、目標値 $R(s)$ が単位階段状関数で表わされる場合について、整定回数を最短にするための制御装置 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ の設計法につき述べる。

3.2.2 制御量 $Y(s)$ の整定回数を最短にするための $D_{F1}^*(z)$,

$D_{F2}^*(z)$ の決め方

式 (3.14) で与えられる開ループ等価制御装置伝達関数 $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ のうち $D_1^*(z)$ は $Z_m [G_1(s)G_2(s)H(s)]$, $Z_m [G_2(s)H(s)]$ の両者の m を含む非共通極のすべてを零点としてもつよう、また $D_2^*(z)$ は両者の m を含んだ共通極の数に等しいだけの未定常数を分母に含むよう選ぶ。ただし $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ の分母はそれぞれ分子の次数に等しい多重ゼロ極（原点における多重ゼロ極（原点における多重極）を持つ必要がある。

以上の要求を満足するには $Z_m [G_1(s)G_2(s)H(s)]$, $Z_m [G_2(s)H(s)]$ が式 (3.22) で与えられる場合には、 $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ はつぎに示すような形で与えられなければならない。

$$D_1^*(z) = \frac{K(z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T})}{z^{r+u}} \quad (3.25)$$

$$D_2^*(z) = \frac{(z_0 + z_1 z + \dots + z_{w+v-1} z^{w+v-1})}{z^{w+v-1}} \quad (3.26)$$

ただし、これらの式における $K, z_0 \sim z_{w+v-1}$ は未定常数である。

さて式 (3.22) において第 1, 第 2 および第 4 項は $D_1^*(z)$ を式 (3.

* $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ が物理的に実現可能なためには、これらを z^{-1} のべき級数に展開したとき、 z の正べきの項が存在してはならない。

25) のように選定することにより、 z^{r+u} 以外に極を持たなくなり、これらの項は第 $r+u+1$ サンプルング時点以後消失することを意味する。したがって、式 (3.22) において考えなければならない項は第3および第5項のみとなる。 $Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)]$ 中、第3、第5項以外を除外したものを $Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)]^\dagger$ と記するものとするれば、

$$\begin{aligned} & Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)]^\dagger D_1^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{(r+w)!} |A_2| | \theta_3 | |B_2| + \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_\ell)} G_1(-b_\ell) [G_2(s)(s+b_\ell)]_{s \rightarrow -b_\ell} \frac{e^{-b_\ell m T}}{z - e^{-b_\ell T}} \right\} \\ & \times \frac{c(z-1)^r \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^{r+u}} \frac{z}{z-1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

更に $Z_m [G_2(s) H(s)]$ に関する応答項は

$$\begin{aligned} & Z_m [G_2(s) H(s)] D_2^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{w!} |A_3| | \theta_4 | |B_3| + \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_\ell)} [G_2(s)(s+b_\ell)]_{s \rightarrow -b_\ell} \frac{e^{-b_\ell m T}}{z - e^{-b_\ell T}} \right\} \\ & \times \frac{\sum_{q=0}^{w+u-1} z_q z^q}{z^{w+u-1}} \frac{z}{z-1} \end{aligned} \quad (3.28)$$

いま制御量 $y(t)$ が第 n サンプルング時点以後、一定値に整定するものと仮定すれば、 $Y^*(z, m)$ はつぎのように表わされなければならない。

$$Y^*(z, m) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n}{z^{n-1}(z-1)} + \frac{\varphi^*(z, m)}{z^{n-1}} \quad (3.29)$$

ただし、 $\varphi^*(z, m)$ の z に関する次数は $(n-1)$ またはそれ以下、 $\alpha_0 \sim \alpha_n$ は定数である。

式 (3.24) における $|\theta_3|, |\theta_4|$ はつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} |\theta_3| &= |\theta_{30}| + |\theta_{31}| + \dots + |\theta_{3w}| \\ |\theta_4| &= |\theta_{40}| + |\theta_{41}| + \dots + |\theta_{4w}| \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここに $|\theta_{3i}|$ および、 $|\theta_{4i}|$ はつぎに示すような $w+1$ 行 $w+1$ 列の行列を意味する。

$$|\theta_{3i}| = |\theta_{4i}| = |U|$$

),
する。
よび
外を

T
T

(7)

$$|\theta_{31}| = mT \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (r+1) & 0 & & \\ 0 & (r+2) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (r+w) \\ & & & (r+w-1) & 0 \end{vmatrix}, |\theta_{41}| = mT \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (1) & 0 & & \\ 0 & (2) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (w-1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\theta_{32}| = (mT)^2 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ (r+2) & 0 & 0 & \\ 0 & (r+3) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (r+w-2) & 0 \end{vmatrix}, |\theta_{42}| = (mT)^2 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ (2) & 0 & 0 & \\ 0 & (3) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (w-2) & 0 \end{vmatrix}$$

(8)

る。

T

(9)

$$|\theta_{3w}| = (mT)^w \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ (r+w) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, |\theta_{4w}| = (mT)^w \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ (w) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

以上 (3.31)

$|A_2||\theta_{30}||B_2| = |A_2||B_2|$ および $|A_3||\theta_{40}||B_3| = |A_3||B_3|$ は式 (3.24) より明らかのようにそれぞれ $(z-1)$ の $r+w+1$ 重および $w+1$ 重の極を含む。したがって式 (3.29) で制御量 $Y^*(z, m)$ が与えられるためにはつぎの関係が成立しなければならない。ただし式 (3.29) における n は $r+u \geq w+v-1$ なる場合には、 $n = r+u$ 、 $w+v-1 > r+u$ なる場合には $n = w+v-1$ となる。

$$\frac{d\eta_0}{dz^{\eta_0}} \left\{ (z-1)^{w+1} \left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} |A_3| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right] \right\}_{z \rightarrow 1} = 0$$

以上 (3.32)

$\eta_0 = 0 \sim (w-1)$

式 (3.32) は $Y^*(z, m)$ の m を含まない項が $z^{r+u}(z-1)$ または $z^{w+v-1}(z-1)$ なる極を有するための条件である (m 個)。

更に、

$$\frac{d\eta_1}{dz^{\eta_1}} \left\{ (z-1)^w \left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |\theta_{31}| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} |A_3| |\theta_{41}| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right] \right\}_{z \rightarrow 1} = 0$$

$\eta_1 = 0 \sim (w-1)$

$|A_2| |\theta_{31}| |B_2|$ および $|A_3| |\theta_{41}| |B_3|$ はそれぞれ $(z-1)$ の $r+w$ および w 重の極を有する。

$$\frac{d\eta_2}{dz^{\eta_2}} \left\{ (z-1)^{w-1} \left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |\theta_{32}| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} |A_3| |\theta_{42}| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right] \right\}_{z \rightarrow 1} = 0$$

$\eta_2 = 0 \sim (w-2)$

$|A_2| |\theta_{32}| |B_2|$ および $|A_3| |\theta_{42}| |B_3|$ はそれぞれ $(z-1)$ の $r+w-1$ および $w-1$ 重の極を有する。

⋮

$$(z-1) \left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |\theta_{3w}| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} |A_3| |\theta_{4w}| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1} = 0$$

$|A_2| |\theta_{3w}| |B_2|$ および $|A_3| |\theta_{4w}| |B_3|$ はそれぞれ $(z-1)$ の $r+1$ および単一極を有する。

式 (3.33) で表わされる $w(w+1)/2$ 個の条件式は $Y^*(z, m)$ の $(mT)^\eta$ ($\eta = 1 \sim w$) を含む項が z^{r+u} または z^{w+v-1} なる極のみを持つための条件である。ただし、これら $w(w+1)/2$ の条件式は互に独立ではなく、つぎに示す w 個の互に独立な条件式に帰着せしめることができる*。

* 附録 1 参照

$$=0 \quad \frac{d^{w-\eta}}{dz^{w-\eta}} \left\{ (z-1)^{w-\eta+1} \left[\frac{k}{(r+w)!} |A_2| |\theta_{3\eta}| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} |A_3| |\theta_{4\eta}| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right] \right\} = 0$$

(3.34)

$|A_2| |\theta_{3\eta}| |B_2|$ および $|A_3| |\theta_{4\eta}| |B_3|$ はそれぞれ $(z-1)$ の $w-\eta+1+i$ および $w-\eta+1$ 重の極を含む。

また式 (3.34) の条件式とさきに $Y(z, m)$ の m を含まない項についてたてた条件式 (3.32) とも全く一致する。^{*}

いま、たとえば式 (3.34) を採用したとすると、この条件式は式 (3.2) および (3.31) の関係からつぎのようにかきかえることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^{w-\eta}}{dz^{w-\eta}} \left\{ \frac{k}{(r+w)!} (z-1)^{r+w-\eta+1} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \sum_{k=0}^{w-\eta} \binom{r+w}{r+\eta+k} \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} \right. \\ & \times [G_1(s) G_2(s) s^{r+w}] \binom{r+\eta+k}{r+k} \left[\frac{d^{(r+k)}}{ds^{(r+k)}} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right) \right] \Big|_{s \rightarrow 0} + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} (z-1)^{w+v-1} \\ & \times \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \sum_{k=0}^{w-\eta} \binom{w}{\eta+k} \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} [G_2(s) s^w] \binom{\eta+k}{k} \\ & \times \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right) \Big|_{s \rightarrow 0} \Big\}_{z=1} = 0 \end{aligned}$$

(3.35)

更に式 (3.22), (3.23) の第5および第2項より、

$$K(e^{-b_\ell T} - 1) G_1(-b_\ell) \prod_{j=1}^u (e^{-b_\ell T} - e^{-a_j T}) + (-b_\ell)^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q (-b_\ell)^q = 0$$

(3.36)

式 (3.35), (3.36) より $w+v$ 個の条件式が得られ、これらの式を z_q に関する $w+q$ 元連立方程式としてとくことにより、制御量 $Y^*(z, m)$ を最小サンプリング回数で整定 (過渡現象を終らせる) せしめるための

* 附録2参照

$j_1, j_2, \dots, j_{w+v-1}$ が一意的に決定する。なお、未定常数 K は、最終整定値の大きさを決定するのに用いる。式 (3.35), (3.36) より求められた $j_1 \sim j_{w+v-1}$ を式 (3.26) に代入することにより、 $D_2^*(z)$ が決定する。 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ は式 (3.14) の関係からつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} D_{F1}^*(z) &= \frac{D_1^*(z)}{1 - Z^*[G_1(s)G_2(s)H(s)]D_1^*(z) - Z^*[G_2(s)H(s)]D_2^*(z)} \\ D_{F2}^*(z) &= \frac{D_2^*(z)}{1 - Z^*[G_1(s)G_2(s)H(s)]D_1^*(z) - Z^*[G_2(s)H(s)]D_2^*(z)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

この方法においては整定後、 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ 共、一定の信号をそれぞれの操作端に供給しつづけることとなる。つぎに、整定以後の所要操作端出力は制御装置 $D_{F1}^*(z)$ のみが供給し、 $D_{F2}^*(z)$ は整定に到る過渡時においてのみ出力を供給し、定常時にはその出力が零となるような設計法について説明する。

3.2.3 $D_{F2}^*(z)$ の出力が最終的に零になるように

$D_{F2}^*(z)$ を決める方法

式 (3.17), (3.18) において、制御装置 $D_{F2}^*(z)$ 出力が最終的に零になるためには $C_2^*(z)$ は原点以外に極を持つことはできない。すなわち目標値入力 $r(t)$ が階段状関数の場合、 $D_2^*(z)$ が $R^*(z) = Z^*[r(t)]$ の極 $z=1$ をその零点の中に含まなければならない。

(1) $G_1(s)$, $G_2(s)$ 共に積分要素を含まない場合

$G_1(s)$, $G_2(s)$ 共積分極を含まないのであるから式 (3.19) において $r=0$, $w=0$ の場合に相当する。すなわち、

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{N_1(s)}{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_w)} \\ G_2(s) &= \frac{N_2(s)}{(s+b_1)(s+b_2)\dots(s+b_v)} \\ H(s) &= \frac{1-e^{-sT}}{s} \end{aligned} \quad (3.38)$$

したがって式(3.22), (3.23)に対応して,

$$\begin{aligned}
 Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)] &= \frac{z-1}{z} Z_m [G_1(s) G_2(s)/s] \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{G_1(0) G_2(0)}{z-1} + \sum_{j=1}^u \frac{1}{(-a_j)} \left[G_1(s)(s+a_j) \right]_{s \rightarrow -a_j} G_2(-a_j) \frac{e^{-a_j m T}}{z-e^{-a_j T}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_\ell)} G_1(-b_\ell) \left[G_2(s)(s+b_\ell) \right]_{s \rightarrow -b_\ell} \frac{e^{-b_\ell m T}}{z-e^{-b_\ell T}} \right\} \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{m1} [G_2(s) H(s)] &= \frac{z-1}{z} Z_{m1} [G_2(s)/s] \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{G_2(0)}{z-1} + \sum_{\ell=1}^v \frac{1}{(-b_\ell)} \left[G_2(s)(s+b_\ell) \right]_{s \rightarrow -b_\ell} \frac{e^{-b_\ell m T}}{z-e^{-b_\ell T}} \right\} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

式(3.25), (3.26) で与えられる $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ の決定と同様の理由からこの場合に対する $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ はつぎのように選定する。

$$D_1^*(z) = \frac{K \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^u} \quad (3.41)$$

$$D_2^*(z) = \frac{z_0 + z_1 z + \cdots + z_v z^v}{z^v} \quad (3.42)$$

未定常数 z_0, z_1, \dots, z_v を決定する $v+1$ 個の条件式はつぎのようになる。

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_v = 0 \quad (3.43)$$

$$K G_1(-b_\ell) \prod_{j=1}^u (e^{-b_\ell T} - e^{-a_j T}) + e^{-b_\ell (u-v)T} \sum_{q=0}^v z_q e^{-b_\ell q T} = 0 \quad (\ell=1 \sim v)$$

この場合、最終整定出力を受持つ項について考えると式(3.15)より

$$\begin{aligned}
 Y_F^*(z, m) &= \frac{G_1(0) G_2(0)}{z-1} \frac{K \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^u} + \frac{G_2(0)}{z-1} \frac{\sum_{q=0}^v z_q z^q}{z^v} \\
 &= \frac{G_1(0) G_2(0)}{(z-1) z^u} K \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T}) + \frac{G_2(0) \sum_{q=0}^{v-1} z_q z^q}{z^v}
 \end{aligned}$$

ただし

$$z_0 + z_1 z + \dots + z_v z^v = (z-1)(z_0' + z_1' z + \dots + z_{v-1}' z^{v-1}) \quad \text{以上 (3.44)}$$

式 (3.44) の意味するところは定常出力を受持つものは第 1 項であり、
 整定に要するサンプリング回数は $u \geq v$ のときは $u+1$ 回、 $v > u$ の
 ときは $v+1$ 回であるということであり、最終整定出力の大きさは、

$$K G_1(0) G_2(0) \prod_{j=1}^u (1 - e^{-\alpha_j T}) \quad (3.45)$$

となり、目標値 (単位階段状関数) との差、すなわちオフセットは

$$e_s = 1 - K G_1(0) G_2(0) \prod_{j=1}^u (1 - e^{-\alpha_j T}) \quad (3.46)$$

したかつて、オフセットなしに目標値ステップに有限時間整定させるに
 は、

$$K = 1 / G_1(0) G_2(0) \prod_{j=1}^u (1 - e^{-\alpha_j T}) \quad (3.47)$$

を満足するよう K の値を選定すればよい。

つぎに各制御装置 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ の出力 $C_1^*(z)$, $C_2^*(z)$ につい
 て考える。

$$\begin{aligned} C_1^*(z) &= D_{F1}^*(z) E^*(z) = D_1^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{K \prod_{j=1}^u (z - e^{-\alpha_j T})}{z^{u-1} (z-1)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

すなわち、制御装置 $D_{F1}^*(z)$ は第 u サンプリング時点以後 一定出力を
 供給する。定常供給出力の大きさは、

$$K \prod_{j=1}^u (1 - e^{-\alpha_j T}) \left(= \frac{1}{G_1(0) G_2(0)} : \text{オフセットを零にする場合} \right) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} C_2^*(z) &= D_{F2}^*(z) E^*(z) = D_2^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{(z_0 + z_1 z + \dots + z_v z^v) z}{z^v (z-1)} = \frac{(z_0 + z_1 z + \dots + z_{v-1} z^{v-1})}{z^{v-1} (z-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{z_0' + z_1' z + \dots + z_{v-1}' z^{v-1}}{z^{v-1}} \quad (3.50)$$

すなわち、制御装置 $D_{F2}^*(z)$ の出力は第 v サンプルング時点以後零となり、整定に到るまでの過渡時のみ操作信号を $G_2(s)$ に供給する。

図 3.4 は本設計法による有限整定系のインデシャル応答を示したものである。

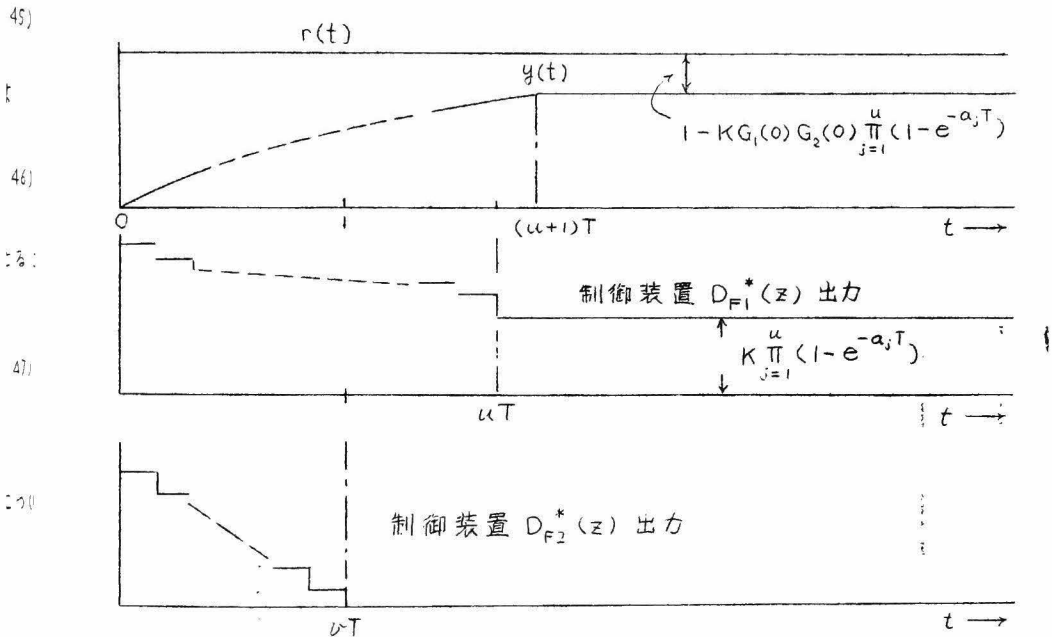


図 3.4 マルチレート制御方式 3.2.3 を採用した系のインデシャル応答 [$G_1(s)G_2(s)$ が積分要素を含まない場合]

(2) $G_1(s)$ が積分要素を含む場合

$G_1(s)$ が積分要素を含み、 $G_2(s)$ が含まないのであるから式 (3.19) において、 $r \neq 0$ 、 $w = 0$ の場合に相当する。すなわち、

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{N_1(s)}{s^r(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_u)} \\ G_2(s) &= \frac{N_2(s)}{(s+b_1)(s+b_2)\dots(s+b_v)} \\ H(s) &= \frac{1-e^{-sT}}{s} \end{aligned} \quad (3.51)$$

したがって式(3.22)および式(3.23)に対応して

$$\begin{aligned}
 Z_m [G_1(s) G_2(s) H(s)] \\
 = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{r!} |A| |\theta| |B| + \frac{1}{r!} P(0) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (mT)^{r-k} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(k)} \right. \\
 + \sum_{j=1}^u \frac{1}{(-a_j)} \left[G_1(s)(s+a_j) \right]_{s \rightarrow -a_j} G_2(-a_j) \frac{e^{-a_j mT}}{z-e^{-a_j T}} \\
 \left. + \sum_{l=1}^v \frac{1}{(-b_l)} \left[G_2(s)(s+b_l) \right]_{s \rightarrow -b_l} G_1(-b_l) \frac{e^{-b_l mT}}{z-e^{-b_l T}} \right\} \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

$$Z_m [G_2(s) H(s)] = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{Q(0)}{z-1} + \sum_{l=1}^v \frac{1}{(-b_l)} \left[G_2(s)(s+b_l) \right]_{s \rightarrow -b_l} \frac{e^{-b_l mT}}{z-e^{-b_l T}} \right\} \quad (3.53)$$

ただし、式(3.52)における $|A|$, $|\theta|$ および $|B|$ は

$$\begin{aligned}
 |A| &= \left| \binom{r}{0} P(0)^{(r)}, \binom{r}{1} P(0)^{(r-1)} \dots \dots \dots, \binom{r}{r-1} P(0)^{(1)} \right| \\
 |\theta| &= \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} mT & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \binom{2}{0} (mT)^2 & \binom{2}{0} mT & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \binom{r-1}{0} (mT)^{r-1} & \dots & \dots & \dots & \binom{r-1}{r-2} mT & 1 \end{array} \right| \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

$$|B| = \left| \frac{1}{z-1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}, \dots \dots \dots \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0} \right|$$

式(3.25), (3.26)と同様の理由から $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ を

$$D_1^*(z) = \frac{K(z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T})}{z^{r+u}} \quad (3.55)$$

$$D_2^*(z) = \frac{z_0 + z_1 z + \dots + z_v z^v}{z^v} \quad (3.56)$$

とえらぶ。この場合、 $g_0, g_1 \sim g_v$ を決定する $v+1$ 個の条件式はつきのようになる。

$$g_0 + g_1 + \dots + g_v = 0$$

$$K(e^{-b_l T} - 1)^r G_l(-b_l) \prod_{j=1}^u (e^{-b_l T} - e^{-a_j T}) + (e^{-b_l T})^{r+u-v} \times \sum_{q=0}^v g_q (e^{-b_l T})^q = 0 \quad (3.57)$$

($l = 1 \sim v$)

前と同様、最終整定出力を受持つ項について考えると、

$$\begin{aligned} Y_F^*(z, m) &= \frac{1}{r!} P(0) \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} \frac{K(z-1)^r \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^{r+u}} \\ &\quad + \frac{Q(0)}{z-1} \frac{g_0 + g_1 z + \dots + g_v z^v}{z^v} \\ &= \frac{KP(0)M(z) \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{r! z^{r+u} (z-1)} + \frac{Q(0)[g'_0 + g'_1 z + \dots + g'_{v-1} z^{v-1}]}{z^v} \end{aligned}$$

ただし、

$$\left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} \equiv \frac{M(z)}{(z-1)^{r+1}} \quad \text{以上 (3.58)}$$

この式の意味するところは定常出力を受持つものは第1項であり、整定に要するサンプリング回数は $r+u \geq v$ のときは $r+u-1$ 回、 $v > r+u$ のときには $v+1$ 回であり、最終整定値は、

$$KP(0)M(1) \prod_{j=1}^u (1 - e^{-a_j T}) \frac{1}{r!} \quad (3.59)$$

であるということである。整定時におけるオフセットを零にするには、

$$K = r! / P(0) M(1) \prod_{j=1}^u (1 - e^{-a_j T}) \quad (3.60)$$

に K を選定すればよい。

つぎに各制御装置 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ の出力について考えると、

$$\begin{aligned} C_1^*(z) &= D_{F1}^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{K(z-1)^{r-1} \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^{r+u-1}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} C_2^*(z) &= D_{F2}^*(z) R^*(z) \\ &= \frac{z_0 + z_1 z + \dots + z_{v-1} z^{v-1}}{z^{v-1}(z-1)} = \frac{z'_0 + z'_1 z + \dots + z'_{v-1} z^{v-1}}{z^{v-1}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

すなわち $C_1^*(z)$ は第 $r+u$ サンプリング時点以後、 $C_2^*(z)$ は第 v サンプリング時点以後、いずれも出力零となる。

図 3.5 は本設計法による系のインデシャル応答を示したものである。

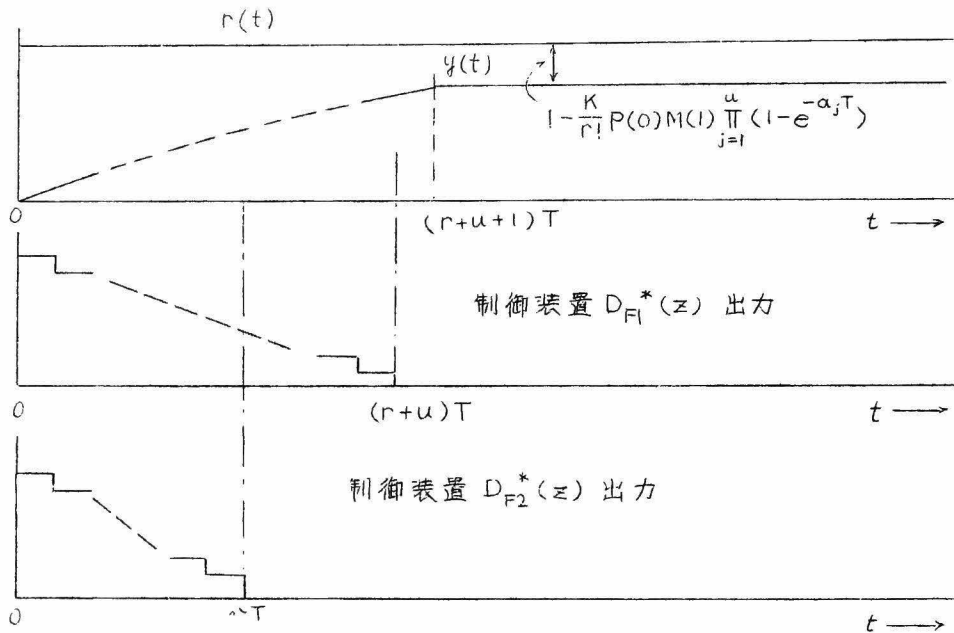


図 3.5 マルチルート 制御方式 3.2.3 を採用した系のインデシャル応答 [$G_1(s)$ が積分要素を含む場合]

(3) $G_2(s)$ が積分要素を含む場合

式 (3.19) において $r=0$, $w \neq 0$ の場合に相当する。すなわち、

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_u)}$$

$$G_2(s) = \frac{N_2(s)}{s^w(s+b_1)(s+b_2)\cdots(s+b_{l-1})} \quad (3.63)$$

1) $Z_m^*[G_2(s)G_1(s)H(s)]$, $Z_m[G_2(s)H(s)]$ として式(3.22) および (3.23) を用うる。ただし、行列 $|A_1|$, $|\theta_1|$, $|B_1|$ および $|\theta_2|$ は存在しないから、これらの式における $|A_1||\theta_1||B_1|$, $|A_2||\theta_2||B_1|$ なる項は省略できる。なおまた

$$\begin{aligned} 2) \quad |A_2| &= \begin{vmatrix} \binom{w}{0}P(0)^{(w)}, & \binom{w}{1}P(0)^{(w-1)} & \cdots & \binom{w}{w}P(0)^{(0)} \\ \binom{w}{0}Q(0)^{(w)}, & \binom{w}{1}Q(0)^{(w-1)} & \cdots & \binom{w}{w}Q(0)^{(0)} \end{vmatrix} \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} \binom{w}{0}Q(0)^{(w)}, & \binom{w}{1}Q(0)^{(w-1)} & \cdots & \binom{w}{w}Q(0)^{(0)} \end{vmatrix} \\ |\theta_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0}mT & 1 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0}(mT)^2 & \binom{2}{1}mT & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{w}{0}(mT)^w & \binom{w}{1}(mT)^{w-1} & \cdots & \binom{w}{w-1}mT & 1 \end{vmatrix} \quad (3.64) \\ |\theta_4| &= |\theta_3| \\ |B_2| &= \left| \frac{1}{z-1}, \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{z-e^{sT}}\right)_{s \rightarrow 0}, \cdots, \frac{d^w}{ds^w}\left(\frac{1}{z-e^{sT}}\right)_{s \rightarrow 0} \right|_t \\ |B_3| &= |B_2| \end{aligned}$$

この場合、開ループ等価制御装置 $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ をつぎのようにえらぶ。すなわち、

$$D_1^*(z) = \frac{K(z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_jT})}{z^{u+1}} \quad (3.65)$$

$$D_2^*(z) = \frac{z_0 + z_1 z + \cdots + z_{v+w-1} z^{v+w-1}}{z^{v+w-1}} \quad (3.66)$$

ここに $D_1^*(z)$ の形は以上に説明した場合とやや異なり、 $r=0$ である

にもかかわらず $(z-1)$ なる因子を分子に含む。(式(3.25), (3.56)参照)
これはつぎのような理由による。すなわち、行列 $|B_2| = |B_3|$ の各要素
の有する最大多重極は $(z-1)^{w+1}$ である。したがって制御量 $Y^*(z, m)$ は
つぎのように表わすことができる。

$$Y^*(z, m) = \frac{A^*(z)}{(z-1)^{w+1}} D_1^*(z) + \frac{B^*(z)}{(z-1)^{w+1}} D_2^*(z) \\ + \frac{C^*(z, m)}{(z-1)^w} D_1^*(z) + \frac{D^*(z, m)}{(z-1)^w} D_2^*(z) \quad (3.67)$$

式(3.66)において $z_0 + z_1 + \dots + z_{v+w-1} = 0$ を満足するよう未
定常数をえらぶものとする。

$$Y^*(z, m) = \frac{A^*(z)}{(z-1)^{v+1}} D_1^*(z) + \frac{B^*(z)}{(z-1)^w} D_2'^*(z) \\ + \frac{C^*(z, m)}{(z-1)^w} D_1^*(z) + \frac{D^*(z, m)}{(z-1)^{w-1}} D_2'^*(z) \quad (3.68)$$

ただし、

$$D_2'^*(z) = \frac{z_0' + z_1' z + \dots + z_{v+w-1}' z^{v+w-1}}{z^{v+w}}$$

また $A^*(z)$, $B^*(z)$, $C^*(z, m)$, $D^*(z, m)$ および $D_2'^*(z)$ はすべて
 $(z-1)$ なる因子を含まない。ところが式(3.29)より

$$A^*(z) D_1^*(z) + (z-1) D_2'^*(z) B^*(z)$$

は $(z-1)^w$ なる因子を持っていなければならない。いま若し、 $D_1^*(z)$
が $(z-1)$ なる因子を分子に持っていないとすると、

$$\frac{d^\eta}{dz^\eta} \left[A^*(z) D_1^*(z) + (z-1) D_2'^*(z) B^*(z) \right]_{z=1} = 0 \quad \eta = 0 \sim w-1 \quad (3.69)$$

なる w 個の条件式において、 $\eta=0$ の場合、すなわち、

$$\left[A^*(z) D_1^*(z) + (z-1) D_2'^*(z) B^*(z) \right]_{z=1} = A^*(1) D_1^*(1) = 0 \quad (3.70)$$

が成立しなければならない。ところが $A^*(z)$ は $(z-1)$ なる因子を持

たないから、この条件式は実現不可能となる。 m を含んだ項についても同様な不合理が生ずる。

$D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ を式(3.65), (3.66) のようにえらんだ場合、 β_0 , β_1 , ..., β_{v+w-1} を決定する $v+w$ 個の条件はつぎのようになる。

$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{v+w-1} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{d^{\eta_0}}{dz^{\eta_0}} \left\{ (z-1)^w \left[\frac{K}{w!} |A_2||B_2| (z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z}{w!} |A_3||B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right] \right\} = 0 \quad z \rightarrow 1$$

$$\eta_0 = 0 \sim (w-2) \quad (3.72)$$

$|A_2||B_2|$ および $|A_3||B_3|$ はいずれも $(z-1)$ の $w+1$ 重根を含む。

$$\frac{d^{\eta_1}}{dz^{\eta_1}} \left\{ (z-1)^{w-1} \left[\frac{K}{w!} |A_2||\theta_{31}||B_2| (z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z}{w!} |A_3||\theta_{41}||B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right] \right\} = 0 \quad z \rightarrow 1$$

$$\eta_1 = 0 \sim (w-2)$$

$|A_2||\theta_{31}||B_2|$ および $|A_3||\theta_{41}||B_3|$ はいずれも $(z-1)$ の w 重根を含む。

$$\frac{d^{\eta_2}}{dz^{\eta_2}} \left\{ (z-1)^{w-2} \left[\frac{K}{w!} |A_2||\theta_{32}||B_2| (z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z}{w!} |A_3||\theta_{42}||B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right] \right\} = 0 \quad z \rightarrow 1$$

$$\eta_2 = 0 \sim (w-3)$$

$|A_2||\theta_{32}||B_2|$ および $|A_3||\theta_{42}||B_3|$ はいずれも $(z-1)$ の $w-1$ 重の極を含む。

⋮

$$(z-1) \left\{ \frac{K}{w!} |A_2||\theta_{3w-1}||B_2| (z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z}{w!} |A_3||\theta_{4w-1}||B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right\} = 0 \quad z \rightarrow 1$$

$|A_2||\theta_{3w-1}||B_2|$ および $|A_3||\theta_{4w-1}||B_3|$ はいずれも $(z-1)$ の単一極を有する。
以上(3.73)

式(3.73)で表わされる $w(w+1)/2$ 個の条件式は式(3.33)の場合と同様、つぎの $w-1$ 個の条件式でおきかえることができる。

$$\frac{d^{w-\eta-1}}{dz^{w-\eta-1}} \left\{ (z-1)^{w-\eta} \left[\frac{K}{w!} |A_2||\theta_{3\eta}||B_2| (z-1) \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) + \frac{z}{w!} |A_3||\theta_{4\eta}||B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right] \right\} = 0$$

$$\eta = 1 \sim (w-1) \quad (3.74)$$

この結果は式(3.72)の条件と一致することは式(3.33)の場合と同

様、附録 2 より容易にわかる。

以上の結果をまとめることにより、 $z_0 \sim z_{v+w-1}$ を決定するに用うる $w+v$ 個の条件式としてつぎの関係式を得る。

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{v+w-1} = 0$$

$$\frac{d^{w-\eta-1}}{dz^{w-\eta-1}} E_\eta(z, z) \Big|_{z=1} = 0 \quad (\eta = 1 \sim w-1)$$

$$K(e^{-b_\ell T} - 1) G_\ell(-b_\ell) \prod_{j=1}^u (e^{-b_\ell T} - e^{-a_j T}) + (e^{-b_\ell T})^{u-v-w+2} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q (e^{-b_\ell T})^q = 0$$

($\ell = 1 \sim v$)

ただし、

$$E_\eta(z, z) = \frac{(z-1)^{w-\eta}}{w!} \sum_{k=0}^{w-\eta} \left\{ \binom{w}{\eta+k} \binom{\eta+k}{k} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right) \Big|_{s=0} \left[K(z-1) \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T}) \right] \right. \\ \left. \times \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} (G_1(s) G_2(s) s^w) \Big|_{s=0} + \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \cdot z^{u-v-w+2} \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} (G_2(s) s^w) \Big|_{s=0} \right\}$$

以上 (3.75)

各制御装置の出力 $C_1^*(z)$, $C_2^*(z)$ はつぎのようになる。

$$C_1^*(z) = D_1^*(z) R^*(z) = \frac{K \prod_{j=1}^u (z - e^{-a_j T})}{z^u}$$

$$C_2^*(z) = D_2^*(z) R^*(z) \quad (3.76)$$

$$= \frac{(z_0 + z_1 z + \dots + z_{w+v-1} z^{w+v-1}) z}{z^{w+v-1} (z-1)} = \frac{z'_0 + z'_1 z + \dots + z'_{w+v-2} z^{w+v-2}}{z^{w+v-2}}$$

ただし

$$(z'_0 + z'_1 z + \dots + z'_{w+v-2} z^{w+v-2})(z-1) = z_0 + z_1 z + \dots + z_{w+v-1} z^{w+v-1}$$

すなわち、 $C_1^*(z)$ は $t+1$ サンプルング時点以後、 $C_2^*(z)$ は $v+w-1$ サンプルング時点以後、いずれもその出力が零になる。

(4) $G_1(s)$, $G_2(s)$ 共に積分要素を含む場合

解析は前述(3)の場合と同じである。以下に結果のみを示す。

$$D_2^*(z) = \frac{K(z-1)^{r+1} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T})}{z^{u+r+1}}$$

$$D_2^*(z) = \frac{z_0 + z_1 z + \dots + z_{v+w-1} z^{v+w-1}}{z^{v+w-1}} \quad (3.77)$$

$z_0, z_1, \dots, z_{v+w-1}$ の $v+w$ 個の未定常数を決定する条件式はつぎのようになる。

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{v+w-1} = 0$$

$$\left. \frac{d^{w-\eta-1}}{dz^{w-\eta-1}} E_\eta(z, z) \right|_{z=1} = 0 \quad (\eta = 1 \sim w-1)$$

$$K(e^{-b_\ell T} - 1)^{r+1} G_1(-b_\ell) \prod_{j=1}^u (e^{-b_\ell T} - e^{-a_j T}) + (e^{-b_\ell T})^{r+u-w-v+2} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q (e^{-b_\ell T})^q = 0$$

($\ell = 1 \sim v$)

ただし、

$$E_\eta(z, z) = \sum_{k=0}^{w-\eta} \left\{ \frac{K(z-1)^{r+w-\eta+1} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T})}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+\eta+k} \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} (G_1(s) G_2(s) s^{r+w}) \right\} \Big|_{s \rightarrow 0}$$

$$\times \binom{r+\eta+k}{r+k} \frac{d^{r+k}}{ds^{r+k}} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right) \Big|_{s \rightarrow 0} + \binom{w}{\eta+k} \frac{d^{w-\eta-k}}{ds^{w-\eta-k}} (G_2(s) s^w) \Big|_{s \rightarrow 0}$$

$$\times \binom{\eta+k}{k} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right) \Big|_{s \rightarrow 0} \frac{z^{r+u-v-w+2} (z-1)^{w-\eta} \sum_{q=0}^{w+\eta-1} z_q z^q}{w!} \Big\}$$

以上 (3.78)

また各制御装置の出力 $C_1^*(z)$, $C_2^*(z)$ は、

$$C_1^*(z) = \frac{K(z-1)^r \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T})}{z^{r+u}}$$

$$C_2^*(z) = \frac{(z_0' + z_1' z + \dots + z_{w+v-2}' z^{v+w-2})}{z^{v+w-2}} \quad \text{以上 (3.79)}$$

すなわち、それぞれ $v+u+1$ および $u+w-1$ サンプルング時点以後その出力は零となる。

3.2.4 数値計算例

$$G_1(s) = \frac{15}{(s+1)(s+3)(s+5)}, \quad G_2(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \quad (3.80)$$

本例は $G_1(s)$, $G_2(s)$ 共に積分性の極を持たない場合に相当する。したがって、制御装置 $D_{F2}^*(z)$ は整定に到るまでの過渡時においてのみ操作信号を供給するよう設計を行うには前述の (1) に記した条件式 (3.43) により開ループ等価制御装置 $D_1^*(z)$, $D_2^*(z)$ の形を求め、更に式 (3.37) より実際に用うるオンライン制御装置 $D_{F1}^*(z)$, $D_{F2}^*(z)$ を決定すればよい。これらはつぎのパルス伝達関数で与えられる。

$$D_{F1}^*(z) = \frac{K(z-0.3679)(z-0.0498)(z-0.0067)}{(1-0.6276K)z^3 - 2.0077Kz^2 - 9.0311Kz - 0.0018K} \quad (3.81)$$

$$D_{F2}^*(z) = \frac{z(z-1)(0.6276z+0.0240)}{(1-0.6276K)z^3 - 2.0077Kz^2 - 9.0311Kz - 0.0018K} \quad (3.82)$$

制御量 $Y^*(z, m)$ 、伝達要素 $G_1(s)$ の出力 $X^*(z, m)$ 、各制御装置の出力 $C_1^*(z)$, $C_2^*(z)$ は各々、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} Y^*(z, m) = & \frac{K(z-0.3679)(z-0.0498)(z-0.0067)}{z^3(z-1)} \\ & + \frac{0.6276 - 5e^{-mT} + 8.7448e^{-2mT} - 10e^{-3mT} + 5.6276e^{-4mT} - e^{-5mT}}{z} K \\ & + \frac{0.0240 + 0.2825e^{-mT} - 1.8540e^{-2mT} + 3.7460e^{-3mT} - 2.6225e^{-4mT} + 0.4177e^{-5mT}}{z^2} K \end{aligned}$$

$$+ \frac{-0.0017e^{-mT} + 0.0091e^{-2mT} - 0.0247e^{-3mT} + 0.0335e^{-4mT} - 0.0183e^{-5mT}}{z^3} K \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} X^*(z, m) = & \frac{K(z^3 - 0.4249z^2 + 0.0211z - 0.0001)}{z^3(z-1)} \\ & + \frac{-1.8750e^{-mT} + 1.2500e^{-3mT} + 0.3750e^{-5mT}}{z} K \\ & + \frac{0.1059e^{-mT} - 0.4683e^{-3mT} + 0.1566e^{-5mT}}{z^2} K \\ & + \frac{-0.0006e^{-mT} + 0.0031e^{-3mT} - 0.0069e^{-5mT}}{z^3} K \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$C_1^*(z) = \frac{K(z-0.3679)(z-0.0498)(z-0.0067)}{z^2(z-1)} \quad (3.85)$$

$$C_2^*(z) = \frac{0.6276z + 0.0240}{z} K \quad (3.86)$$

これらに対し逆Z変換公式を適用することにより、時間関数に直せば表 3.1 のようになる。表における n, m と時間 t との間には $y(nm) = Z^{-1}[Y^*(z, m)]$, $x(nm) = Z^{-1}[X^*(z, m)]$ に関しては $t = (n-1)T + mT$ ($n=1, 2, \dots, m=0 \sim 1$), $C_1(n) = Z^{-1}[C_1^*(z)]$, $C_2(n) = Z^{-1}[C_2^*(z)]$ に関しては $t = nT$ ($n=0, 1, 2, \dots$) なる関係が存在する。

図 3.6 はこれらの値を図示したもので、 $y(t), x(t)$ 共 $t \geq 3T$ 以後一定値 $\cong 0.60K$ に整定、制御装置出力 $C_1(t)$ は第3 サンプルング時点以後一定操作量 $\cong 0.60K$ を供給し、 $C_2(t)$ は第2 サンプルング時点以後、出力零となっている。オフセットを無くするには、

$$K = \frac{1}{0.597} = 1.675 \left[= \frac{1}{(1-e^{-1})(1-e^{-3})(1-e^{-5})} \right] \text{ 式(3.45)参照} \quad (3.87)$$

とえらばよい。

表 3.1

n	m	$y(nm)$	$x(nm)$	$C_1(n)$	$C_2(n)$
0		0	0	K	0.623K
1	0	0	0	0.576K	0.024K
	0.25	0.098K	0.023K		
	0.50	0.260K	0.111K		
	0.75	0.422K	0.237K		
	1	0.569K	0.370K		
2	0	0.569K	0.370K	0.597K	0
	0.25	0.610K	0.482K		
	0.50	0.604K	0.543K		
	0.75	0.594K	0.580K		
	0	0.594K	0.592K		
3	0	0.594K	0.592K	0.597K	0
	0.25	0.596K	0.595K		
	0.50	0.5965K	0.596K		
	0.75	0.5966K	0.596K		
	1	0.597K	0.596K		
4	0	0.597K	0.596K	0.597K	0
	0.25	0.597K	0.596K		
	0.50	0.597K	0.596K		
	0.75	0.597K	0.596K		
	1	0.597K	0.596K		
5	0	0.597K	0.596K	0.597K	0
	0.25	0.597K	0.596K		

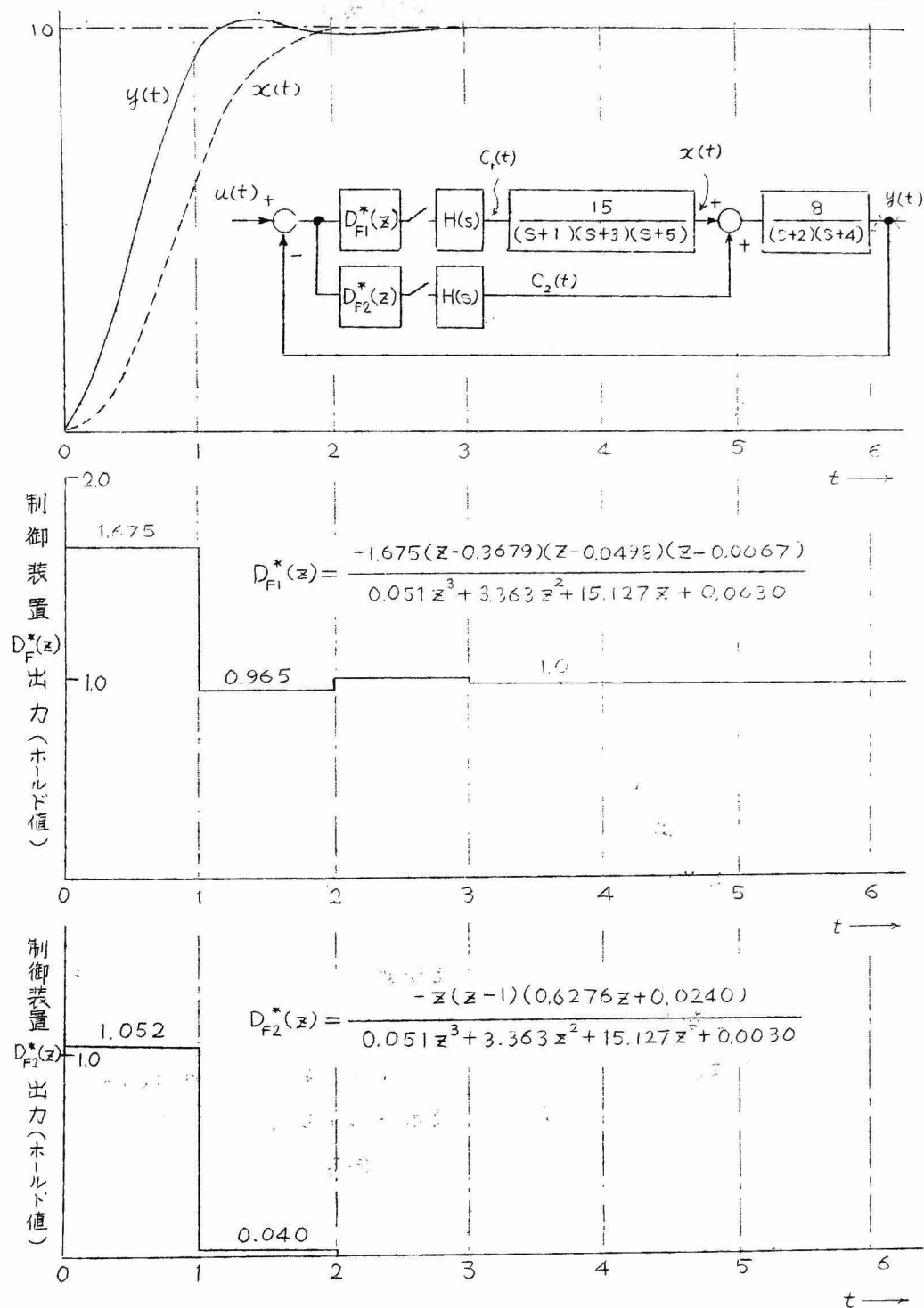


図 3.6 マルチレート制御系における有限整定時間応答

第Ⅱ編 非線形サンプル値系の理論的研究

連続制御系において、その系の動作が全く線形域で行われるようなものを設計することは経済上の理由や各部品の工作精度の限界等から難しく、大抵の場合、幾種類かの非線形特性が含まれるのが普通である。この場合、系の制御性能はこれ等非線形特性のため、線形理論でシンセシスされたものよりも悪化するのが普通であり、時には線形理論では見出すことのできない非線形特性に起因する乱調現象を起こすような場合もある。

サンプル値系に非線形特性が含まれる場合の解析は飽和、バックラッシュ、リレー等、言わば空間的な非線形特性の他に、サンプラーによる信号の断続と言う時間的な非線形性が加味されるため、取扱いが非常に面倒になる。

サンプル値系において非線形特性の現れる位置としては連続信号部分と不連続信号部分、すなわちサンプラー出力、或は零次ホールド回路出力とが考えられるが解析目標としては後者が重要である。何故ならば、このような場合、一般に非線形要素の出力にはサンプリング動作による非常に大きな高周波成分を含み、非線形問題の重要な課題の一つである非線形振動の解析等において、従来連続系において非線形振動の工学的解析手段として重宝されて来た等価伝達関数法で代表される近似解法がそのまま適用できないからである。

本編においては、以上のような観点から非線形特性が図4.1(a)および(b)に示すようにサンプラーの直後、或はホールド回路出力に存在する場合につき解析を行ったものである。ホールド回路が零次ホールドである場合には非線形要素はホールド回路の前後、どちらに仮定しても現象の把握に変化は起こらない。

第4章 有限整定時間応答系における飽和の影響

4.1 飽和現象と有限整定特性

サンプル値制御系における興味ある問題の一つはすでに第3章で述べたように、特殊なデジタル形オン・ライン制御装置を用うることにより有限整定時間応答特性を得ることができることである。この場合、有限整定するに到るまでの所要サンプリング回数は制御対象の次数によりその最小サンプリング回数が制限される。しかしながら、サンプリング周期 T は理論的にはいくらでも小さくできるから、整定に要する時間は理論的には系の有するむだ時間にまで短縮することができることになる。しかし実際には有限整定時間応答系で整定時間を短くするため、サンプリング周期を系の代表的な時定数に比べ過渡に短かく設計すれば、制御装置に要求される過渡出力が過大になり、系の各部に飽和を生ずることになる。本章においては飽和現象により、有限整定時間応答系の受ける影響について考察する。

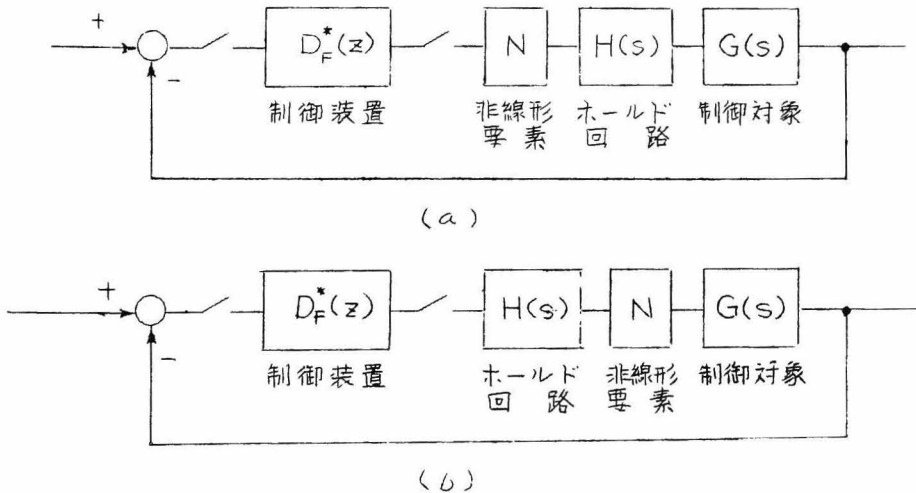


図 4.1 非線形特性とサンプラーの位置

図 4.2 (a) に示すように飽和特性を含む系において、飽和要素の影響は、この飽和要素を取去り、その代り同図 (b) に示すように外乱パルス列、

$$\xi^*(z) = \xi_0 + \xi_1 z^{-1} + \xi_2 z^{-2} + \dots \quad (4.1)$$

を加えることにより等価的に取扱うことができる。ここに ξ_i ($i=0, 1, 2, \dots$) は時刻 $t = iT$ における制御装置出力 x_i が飽和値 Δ を超過した量を意味し、 x_i が飽和しない場合には $\xi_i = 0$ とする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \Delta - x_i \leq 0 & (x_i \geq \Delta \text{ のとき}) \\ \xi_i &= -\Delta - x_i \geq 0 & (x_i \leq -\Delta \text{ のとき}) \\ \xi_i &= 0 & (-\Delta < x_i < \Delta \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ただし飽和要素線形部のゲインは制御対象に含めて考えるものとする。

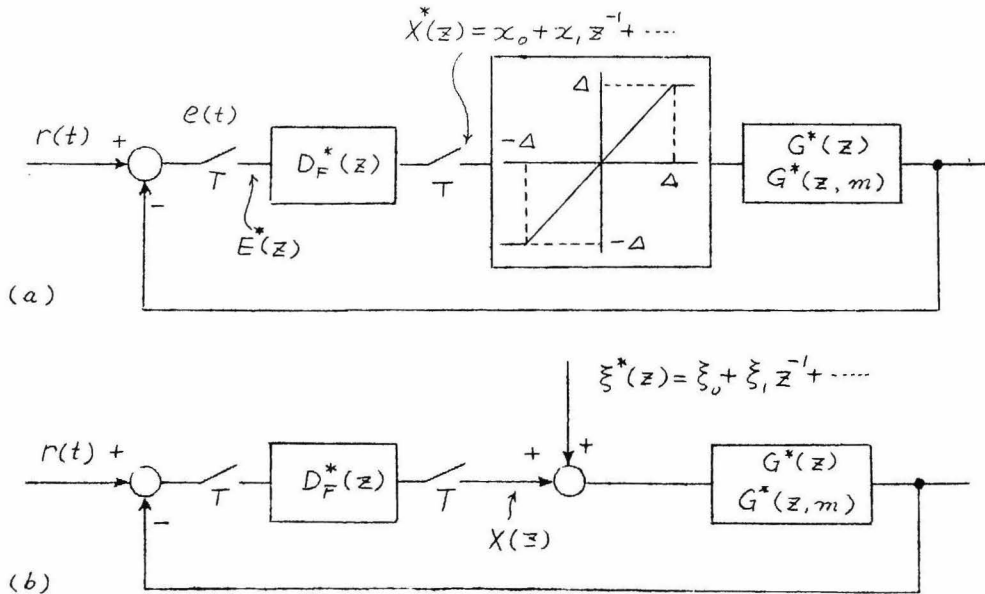


図 4.2 制御装置出力に飽和を含む系

図 4.2 (b) の系における偏差出力 $e(t)$ の拡張 z 変換 $E^*(z, m)$ は、

$$E^*(z, m) = P^*(z, m) - G^*(z, m) [1 - G^*(z) D^*(z)] \xi^*(z) \quad (4.3)$$

ここに

$$P^*(z, m) = R^*(z, m) - G^*(z, m) D^*(z) R^*(z) \quad (4.4)$$

$$D^*(z) = \frac{D_F^*(z)}{1 + D_F^*(z) G^*(z)} \quad (4.5)$$

式(4.3), (4.4)における $R^*(z, m)$, $G^*(z, m)$ はそれぞれ、目標値入力 $r(t)$ 、制御対象+ホールド回路の拡張 z 変換を意味する。一方、E. I. Jury, W. Schroeder による有限整定時間応答系の設計法によれば、

$$G^*(z, m) = c \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{(z-1)^{p+1}} + \frac{\phi_p(m)}{(z-1)^p} + \dots + \frac{\phi_1(m)}{z-1} + \frac{\psi(z, m)}{(z-r_1) \dots (z-r_L)} \right] \quad (4.6)$$

で与えられるとき、目標値入力 $r(t)$ としてステップ関数に整定させる場合、式(4.5)で表わされる開ループに換算された制御装置 $D^*(z)$ としては、式(4.6)で表わされる $G^*(z, m)$ の m を含むすべての極をその零により打消し、定常偏差を零にするよう次の関係式で与えられる。

$$D^*(z) = \frac{1}{c} \frac{(z-1)^p (z-r_1)(z-r_2) \dots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \dots (1-r_L) z^{p+L}} \quad (4.7)$$

目標値がステップ関数なるとき、

$$R^*(z) = Z[r(t)] = \frac{z}{z-1}, \quad \bar{R}^*(z, m) = Z_m[r(t)] = \frac{1}{z-1} \quad (4.8)$$

であるから、

$$\begin{aligned} P^*(z, m) &= \frac{1}{z-1} - \frac{(z-r_1)(z-r_2) \dots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \dots (1-r_L) z^{p+1}(z-1)} \\ &\quad - \frac{\phi_p(m)(z-r_1) \dots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \dots (1-r_L) z^{p+L}} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad - \frac{\phi_1(m)(z-1)^{p-1}(z-r_1) \dots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \dots (1-r_L) z^{p+L}} \end{aligned}$$

$$-\frac{\psi(z, m)(z-1)^P}{(1-r_1)(1-r_2) \cdots (1-r_L) z^{P+L}} \quad (4.9)$$

と表わされ、 z^{-1} に関する有限次多項式となる。 $t = (n-1)T + mT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1 \sim 0$) における $P(z, m)$ による偏差出力 $e_p[(n-1)T + mT]$ は

$$e_p(t) = e[(n-1)T + mT] = \frac{1}{2\pi j} \int_C P^*(z, m) z^{n-1} dz = 0, \quad n > P + L + 1 \quad (4.10)$$

となり、外乱 $\xi^*(z)$ を考えない場合、この系はステップ状目標値入力に対し、 $t \geq (P+L+1)T$ 以後全く偏差なく整定する有限整定系なることを示している。ところが式(4.3)第2項は

$$G^*(z) = G^*(z, m) \Big|_{m=0} \equiv G^*(z, 0) z \quad (4.11)$$

で与えられるから

$$1 - G^*(z) D^*(z) = P^*(z, 0) z \quad (4.12)$$

となり式(4.3)と同様 z^{-1} の有限次多項式となるが、 $G^*(z, m)$ なる項がかかっているため、仮に $\xi^*(z)$ が有限個の外乱パルスの列で与えられたとしても、その影響は $t = \infty$ に到るまで存続することになる。すなわち、仮に1つのサンプリング時点における制御装置出力に飽和が生じても最早有限整定の特性は失われることを意味する。一方制御装置 $D_F^*(z)$ の出力の z 変換 $X^*(z)$ は、

$$X^*(z) = D^*(z) R^*(z) - D^*(z) G^*(z) \xi^*(z) \quad (4.13)$$

で与えられる。ところが $D^*(z) G^*(z)$ は、

$$D^*(z) G^*(z) = \frac{(z-r_1)(z-r_2) \cdots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \cdots (1-r_L) z^{P+L}} + \frac{\phi_p(0)(z-r_1) \cdots (z-r_L)(z-1)}{(1-r_1)(1-r_2) \cdots (1-r_L) z^{P+L}} \\ \cdots \cdots \cdots$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & + \frac{\phi_1(0)(z-1)^P(z-r_1) \cdots (z-r_L)}{(1-r_1)(1-r_2) \cdots (1-r_L)z^{P+L}} \\
 & = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{P+L} z^{-(P+L)} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

なる z^{-1} の有限次多項式で表わされるから $\xi^*(z)$ が有限個のパルスで表わされるかぎり最後の外乱パルスより $P+L$ サンプリング経過後に $\xi^*(z)$ の影響は制御装置出力からは消失する。

4.2 飽和現象により有限整定時間応答系の受ける制御特性の変化

4.1において説明したように、E.I. Jury, W. Schroeder により提唱された有限整定時間応答系は、過渡応答を有限時間で終了せしめる有限時間整定性の面からは飽和を含む一般外乱に対し、非常に無力であり、整定に到るまでの制御装置出力に少しでもくわいがあれば、有限整定の特質は失われてしまう。すなわち、有限時間整定性に関するかぎりこの系は開ループを形成していないことがわかる。しかし実際問題として、厳密な意味での有限整定はそれほど必要なことではなく、偏差がある許容値以下に収まれば実用上十分なことが多い。実際上の点から言えば、上に述べた飽和や外乱により、偏差が上記許容値に収斂するまでにたどる過渡応答がどのような影響を受けるかが問題である。

以上のような観点からここでは、例として一般プロセス特性の最も簡単な近似と考えられる“一次おくれ+むだ時間”で表わされる系に対し、前記有限整定時間応答補償法を適用した場合、若し制御装置出力が飽和すればその系の制御性能がどのような影響を受けるかを制御性能評価の尺度としてよく用いられる自乗偏差をとり検討してみる。

4.2.1 時間および信号の無次元化

図4.3はここで取りあつかう系のブロック図である。

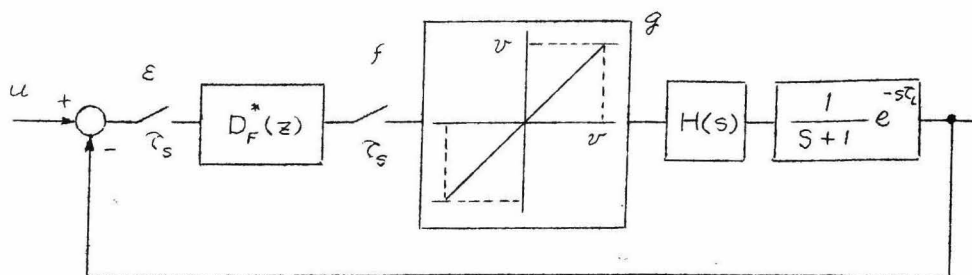


図 4.3 飽和を含むサンプル値制御系の 1 例

図における諸量は解析の便宜上、制御対象時定数 T_0 および制御対象のゲイン定数 K をそれぞれ時間および信号の基準単位として無次元化したものである。すなわち無次元化量と非無次元化量との間の変換関係は表 4.1 に示すようになる。

無次元化時間	$\zeta = t/T_0$, t ; 実時間
サンプルング周期	$\zeta_s = T/T_0$, T : 実際の周期
むだ時間	$\zeta_L = T_L/T_0$, T_L : " むだ時間
線形領域	$v = \Delta/K$, Δ : " 線形領域
入力	$u = r/K$, r : " 目標値入力
制御装置出力	$f = x/K$, x : " 制御装置出力
飽和要素出力	$g = y/K$, y : " 飽和要素出力
偏差	$\varepsilon = e/K$, e : " 偏差
飽和等価外乱	$\zeta = \xi/K$, ξ : " 飽和等価外乱

表 4.1 時間および信号の無次元化

なお、制御対象のゲイン K は 4.1 で述べた通り飽和要素の線形領域のゲインを含むものとする。

4.2.2 制御対象、制御装置のパルス伝達関数

式 (4.15) は制御対象 (零次ホールドを含む) の拡張 z 変換を示す。

この場合注意すべきことは、本制御対象にはむだ時間 τ_L が存在する故、その拡張 z 変換は各サンプリング時点間において、むだ時間 τ_L を界にして別々に分離された形で与えられることである。

$$\left. \begin{aligned} G^*(z, m)_< &= \frac{z^{-2} [-b_{1m1} - b_{2m1} z^{-1}]}{d(1 + a_1 z^{-1})} & 0 \leq m < \frac{\tau_L}{\tau_s} \\ G^*(z, m)_> &= \frac{z^{-1} [-b_{1m2} - b_{2m2} z^{-1}]}{d(1 + a_1 z^{-1})} & \frac{\tau_L}{\tau_s} \leq m < 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)^*$$

図 4.3 において制御装置 $D_F^*(z)$ が $\tau=0$ において加えられた単位ステップ状関数に対して $\tau=\tau_s+\tau_L$ 以後オフ・セットなく整定させるよう設計されたものとするれば、そのパルス伝達関数 $D_F^*(z)$ は、

$$D_F^*(z) = d \cdot \frac{1 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (4.16)^{**}$$

ただし以上両式において、

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{1 - e^{-\tau_s}}, \quad a_1 = -e^{-\tau_s}, \quad b_1 = -\frac{1 - e^{-(\tau_s - \tau_L)}}{1 - e^{-\tau_s}}, \quad b_2 = -\frac{e^{-\tau_s}(e^{\tau_L} - 1)}{1 - e^{-\tau_s}} \\ b_{1m1} &= \frac{e^{-m\tau_s} e^{-(\tau_s - \tau_L)} - 1}{1 - e^{-\tau_s}}, \quad b_{2m1} = \frac{e^{-\tau_s} - e^{-\tau_s} e^{\tau_L} e^{-m\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} \\ b_{2m1} &= \frac{e^{\tau_L} e^{-m\tau_s} - 1}{1 - e^{-\tau_s}}, \quad b_{2m2} = \frac{e^{-\tau_s} - e^{-m\tau_s} e^{\tau_L}}{1 - e^{-\tau_s}} \end{aligned}$$

以上 (4.17)

以上の式は $\tau_L < \tau_s$ として求めたものであるが、 $\tau_L = k\tau_s + \tau_{L0}$ (k ; 正整数, $\tau_{L0} < \tau_s$), すなわちむだ時間 τ_L がサンプリング周期 τ_s よりも長い場合には、式 (4.15) に z^{-k} を掛け、式 (4.17) における τ_L の代りに τ_{L0} を用うればよい。

式 (4.3) ~ (4.5) および (4.15) ~ (4.17) より制御装置出力 f の z 変換 $F^*(z)$ 、偏差 ε の拡張 z 変換 $E^*(z, m)$ はそれぞれ次の関係で与えられる。

* 式 (4.15) の導出については附録 3 参照

** 式 (4.16) の導出については附録 4 参照

$$F^*(z) = \frac{d(1+a_1 z^{-1})}{1-z^{-1}} + z^{-1}(b_1 + b_2 z^{-1}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)}$$

$$E^*(z, m)_< = z^{-1} (1 + b_{1m1}) z^{-2} + \frac{z^{-2}(b_{1m1} + b_{2m1} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)}$$

$$E^*(z, m)_> = (1 + b_{1m2}) z^{-1} + \frac{z^{-1}(b_{1m2} + b_{2m2} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)}$$

(4.18)*

ここに ζ_i は 4.1 における如く、飽和要素の存在を外乱パルス列で等価したもので、 $\tau = i\tau_s$ における制御装置出力 f_i との間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i &= v - f_i \leq 0 & (f_i \geq v \text{ のとき}) \\ \zeta_i &= -v - f_i \geq 0 & (f_i \leq -v \text{ のとき}) \\ \zeta_i &= 0 & (-v < f_i < v \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

飽和要素が存在しない場合、式 (4.18) において ζ_i のかかった項は存在しないから、その場合ステップ状入力に対する偏差の応答は図 4.4 に示すように $\tau = \tau_L +$

τ_s 以後完全に零になり、この系が有限整定時間応答系なることを示している。また ζ_i のうち 1 個でも存在すれば 4.1 において述べたように偏差 $E^*(z, m)$ は z^{-1} に関する無限ベキ級数となり、過渡応答が $\tau \rightarrow \infty$ まで持続し、有限整定性が失わ

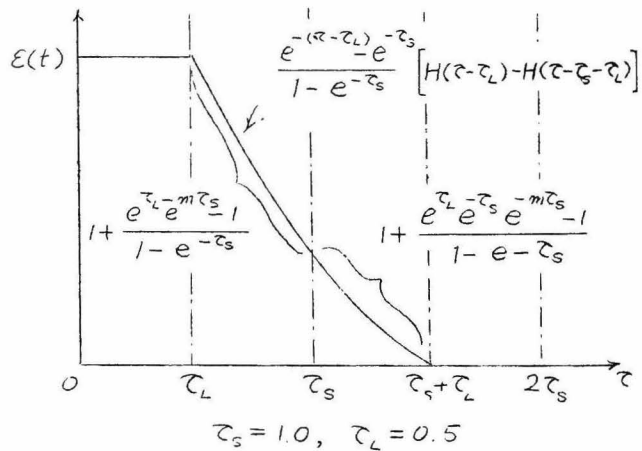


図 4.4 飽和を生じない場合のインデシャル応答 (偏差)

* 式 (4.18) の導出については附録 5 参照。

れる。なお、この場合においても制御装置出力 $F^*(z)$ は有限項にとどまる。

4 2 3 飽和値 v と飽和現象

いまある $v/u = v$ ($\because u$: 単位ステップ) の値に対して、 $\tau = 0, \tau_s, 2\tau_s, \dots$ における制御装置出力 f_1, f_2, f_3, \dots を示せば、

$$\begin{aligned} f_1 &= d \\ f_2 &= 1 + b_1 \zeta_1 \\ f_3 &= 1 + b_1 \zeta_2 + b_2 \zeta_1 \\ f_4 &= 1 + b_1 \zeta_3 + b_2 \zeta_2 \\ &\vdots \\ f_n &= 1 + b_1 \zeta_{n-1} + b_2 \zeta_{n-2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.20)$$

で与えられる。ところが式(4.17)より明らかのように、 $\tau_s \geq \tau_L$ なる限り

$$d > 1, \quad b_1 \leq 0, \quad b_2 \leq 0 \quad (4.21)$$

の関係が成立し、式(4.19)の関係から飽和現象は必ず f_i の正の値で起ることになりしたがって、

$$\zeta_i \leq 0 \quad (4.22)$$

が成立する。いま $|b_2| \leq |b_1|$ なる場合 すなわち

$$\tau_L \leq \log \frac{1 + e^{-\tau_s}}{2e^{-\tau_s}} \quad (4.23)$$

なるサンプリング周期に比べ、むだ時間が比較的に短い場合につき考える。この場合もし $(n-1)\tau_s$ における制御装置出力 f_n が飽和し、 f_{n+1} が飽和域をはすれ、線形領域に入ったと仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} f_n &= 1 + b_1 \zeta_{n-1} + b_2 \zeta_{n-2} > v, \quad \zeta_n = v - f_n < 0 \\ f_{n+1} &= 1 + b_1 \zeta_n + b_2 \zeta_{n-1} < v, \quad \zeta_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

この場合、 f_{n+2} は次のように表わされる。

$$f_{n+2} = 1 + b_1 \zeta_{n+1} + b_2 \zeta_n = 1 + b_2 \zeta_n > 0 \quad (4.25)$$

以上の条件から明らかに、

$$\begin{aligned} f_{n+2} - f_{n+1} &= 1 + b_2 \zeta_n - (1 + b_1 \zeta_n + b_2 \zeta_{n-1}) \\ &< 1 + b_1 \zeta_n - (1 + b_1 \zeta_n + b_2 \zeta_{n-1}) \\ &= -b_2 \zeta_{n-1} < 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

すなわち、 $f_{n+2} < f_{n+1}$ であるから f_{n+2} も飽和せず $\zeta_{n+2} = 0$ となる。このように相隣合える2つのサンプリング時点出力が飽和しないときは式(4.20)より明らかなように制御装置出力は再び飽和を起こすことなく線形領域で動作することになる。以上のことから次の結論が得られる。すなわち、式(4.23)が成立するような比較的むだ時間の小さい系においては、図4.5に示すように $t = (n-1)\tau_s$ における制御装置出力 f_n が飽和する場合には、同サンプリング時点に到る $t=0, \tau_s, 2\tau_s, \dots, (n-2)\tau_s$ における出力 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}$ のすべてがやはり飽和している、

そうして若し、 f_{n+1} が飽和領域からはずれ線形域に入ったとすると、以後における制御装置出力 $f_{n+2}, f_{n+3}, \dots, f_\infty$ は再び飽和することなく系は線形動作に移ることが

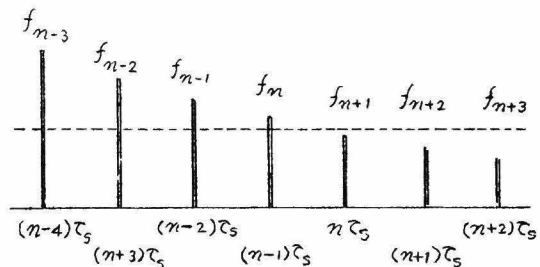


図 4.5 むだ時間の少ない場合の制御装置出力(飽和時)

わかる。この場合、 n の値は v の値、すなわち飽和値が低くなるほど大きくなり、 $v=1$ のとき $n=\infty$ となる。

つぎに $|b_2| > |b_1|$, すなわち、

$$\tau_L > \log \frac{1 + e^{-\tau_s}}{2e^{-\tau_s}} \quad (4.27)$$

で表わされる比較的むだ時間の大きい場合について考える。この場合には必ずしも(4.26)の関係は成立せず、制御装置出力が一旦飽和から解放されても次のサンプリング時点における制御装置出力が再び飽和を起

すことか考えられる。ここで f_n が飽和せず、 f_{n+1} が飽和する場合、 f_{n+2} はどうなるかを考える。すなわち、

$$f_n = 1 + b_1 \zeta_{n-1} + b_2 \zeta_{n-2} > 0, \quad \zeta_n = 0$$

$$f_{n+1} = 1 + b_1 \zeta_n + b_2 \zeta_{n-1} = 1 + b_2 \zeta_{n-1} > v, \quad \zeta_{n+1} = v - f_{n+1} < 0$$

$$f_{n+2} = 1 + b_1 \zeta_{n+1} + b_2 \zeta_n = 1 + b_1 \zeta_{n+1}, \quad \text{以上 (4.28)}$$

$$\therefore f_{n+2} - f_n = 1 + b_1 \zeta_{n+1} - (1 + b_1 \zeta_{n-1} + b_2 \zeta_{n-2})$$

$$= 1 + b_1 (v - 1 - b_2 \zeta_{n-1}) - (1 + b_1 \zeta_{n-1} + b_2 \zeta_{n-2})$$

$$= b_1 (v - 1) - b_1 (1 + b_2) \zeta_{n-1} - b_2 \zeta_{n-2}$$

$$= b_1 (v - 1) + b_1^2 \zeta_{n-1} - b_2 \zeta_{n-2} \quad (4.29)^*$$

(1) まし、 $v \geq 1$ とすると式 (4.29) の各項はいずれも負になり、

$$0 < f_{n+2} < f_n \quad (4.30)$$

が成立する。したがって f_{n+2} は飽和しない。なお $v < 1$ は飽和値が目標値入力 $u = 1$ の大きさより小さくなることを意味し、図 4.3 の系の場合、このような場合を仮定することは明らかに無意味である。以上のことからつぎのことが

結論できる。すなわち式 (4.27) が成立するむだ時間の比較的大きな場合においては、図 4.6 に示すように制御装置出力が 1 サンプリ

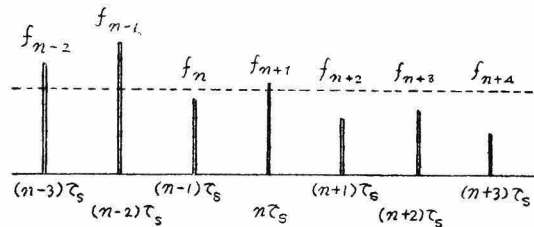


図 4.6 むだ時間の大きい場合の制御装置出力 (飽和時)

ング時点毎に飽和、非飽和をくりかえし、系の応答が振動的となることがある。いま $f_1 \sim f_p$ まで連続飽和、 $f_{p+1} \sim f_{p+q}$ までは 1 つおきに飽和 (f_{p+1} : 非飽和、 f_{p+q} : 飽和、 $\therefore q$: 偶数)、 f_{p+q+1} 以後、すべてのサンプリング時点における制御装置出力が飽和しないものとすれば式 (4.19) より、

$$f_1 = d > v, \quad \zeta_1 = v - f_1 < 0$$

* $1 + b_1 + b_2 = 0$

** 図 4.5 の場合は $p = n, q = 0$ の特別の場合と考えることができる。

$$f_2 = 1 + b_1 \zeta_1 > v, \quad \zeta_2 = v - f_2 < 0$$

$$f_3 = 1 + b_1 \zeta_2 + b_2 \zeta_1 > v, \quad \zeta_3 = v - f_3 < 0$$

$$f_p = 1 + b_1 \zeta_{p-1} + b_2 \zeta_{p-2} > v, \quad \zeta_p = v - f_p < 0$$

$$f_{p+1} = 1 + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1} < v, \quad \zeta_{p+1} = 0$$

$$f_{p+2} = 1 + b_2 \zeta_p > v, \quad \zeta_{p+2} = v - f_{p+2} < 0$$

$$f_{p+3} = 1 + b_1 \zeta_{p+2} < v, \quad \zeta_{p+3} = 0$$

$$f_{p+q-1} = 1 + b_1 \zeta_{p+q-2} < v, \quad \zeta_{p+q-1} = 0$$

$$f_{p+q} = 1 + b_2 \zeta_{p+q-2} > v, \quad \zeta_{p+q} = v - f_{p+q}$$

$$f_i < v, \quad \zeta_i = 0, \quad i \geq p+q+1 \quad \text{以上 (4.31)}$$

上の諸式より

$$(1 + b_1 \bar{z}^{-1} + b_2 \bar{z}^{-2}) \sum_{i=1}^p \zeta_i \bar{z}^{-(i-1)}$$

$$= (1-d) + (v-1) \sum_{i=1}^p \bar{z}^{-(i-1)} + b_1 \zeta_p \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_{p-1} \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_p \bar{z}^{-(p+1)} \quad (4.32)$$

$$(1 + b_2 \bar{z}^{-2}) \sum_{j=p+1}^{p+q} \zeta_j \bar{z}^{-(j-1)}$$

$$= \bar{z}^{-(p+1)} \left[(v-1) \sum_{j=1}^{q/2} \bar{z}^{-2(j-1)} - b_2 \zeta_p + b_2 \zeta_{p+q} \bar{z}^{-q} \right] \quad (4.33)$$

式(4.18)にこれらの関係を代入することにより、このような飽和状態に対する偏差 $\varepsilon(t)$ の拡張 z 変換は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E^*(z, m)_< &= \bar{z}^{-1} + (1 + b_{1m}) \bar{z}^{-2} \\ &+ \frac{\bar{z}^{-2}(b_{1m_1} + b_{2m_1} \bar{z}^{-1})}{d(1 + a_1 \bar{z}^{-1})} \left[(1-d) + (v-1) \frac{1 - \bar{z}^{-p}}{1 - \bar{z}^{-1}} + (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_p \bar{z}^{-(p+1)} \right] \\ &+ \frac{\bar{z}^{-(p+3)}(b_{1m_1} + b_{2m_1} \bar{z}^{-1})(1 + b_1 \bar{z}^{-1} + b_2 \bar{z}^{-2})}{d(1 + a_1 \bar{z}^{-1})(1 + b_2 \bar{z}^{-2})} \left[(v-1) \frac{1 - \bar{z}^{-q}}{1 - \bar{z}^{-2}} - b_2 \zeta_p + b_2 \zeta_{p+q} \bar{z}^{-q} \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
E^*(z, m)_> &= (1 + b_{1m_2}) z^{-1} \\
&+ \frac{z^{-1}(b_{1m_2} + b_{2m_2} z^{-1})}{d(1 + a_1 z^{-1})} \left[(1-d) + (v-1) \frac{1-z^{-P}}{1-z^{-1}} + (b_1 \zeta_P + b_2 \zeta_{P-1}) z^{-P} + b_2 \zeta_P z^{-(P+1)} \right] \\
&+ \frac{z^{-(P+2)}(b_{1m_2} + b_{2m_1} z^{-1})(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{d(1 + a_1 z^{-1})(1 + b_2 z^{-2})} \left[(v-1) \frac{1-z^{-q}}{1-z^{-2}} - b_2 \zeta_P + b_2 \zeta_{P+q} z^{-q} \right]
\end{aligned}
\tag{4.35}$$

これらの諸関係式よりわかることは、飽和が存在する場合における系の偏差 $\varepsilon(t)$ を求めるには ζ_i ($i=1, 2, \dots, q$) のすべてを知らなくとも、 $v=P-2$, $P-1$ および $P+q-1$ における飽和量 ζ_{P-1} , ζ_P および ζ_{P+q} を知ればよいことである。系が飽和を含まないときには式(4.34), (4.35)における第1項だけが残る、また系の有するむだ時間が比較的小さく 図 4.5 に示すような単調な飽和状態のときには $q=0$ となり、式(4.34), (4.35)における各第1, 第2項が残る。以下 $q=0$, $q \neq 0$ なる場合に分け、飽和により制御性がどのような影響を受けるかを偏差の自乗制御面積につき検討する。

4.2.4 $q=0$ の場合に対する自乗制御面積の計算式

式(4.17)を参照することにより、

$$\begin{aligned}
\frac{z^{-2}}{d} \frac{b_{1m_1} + b_{2m_1} z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} &= \frac{z^{-2}}{d} \left[b_{1m_1} + \varphi_1(m) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-i\tau_s} z^{-(i+1)}) \right] \\
\frac{z^{-1}}{d} \frac{b_{1m_2} + b_{2m_2} z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} &= \frac{z^{-1}}{d} \left[b_{1m_2} + \varphi_2(m) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-i\tau_s} z^{-(i+1)}) \right]
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\varphi_1(m) &= b_{2m_1} - b_{1m_1} \quad a_1 = -e^{-\tau_s} e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} \\
\varphi_2(m) &= b_{2m_2} - b_{2m_1} \quad a_1 = -e^{\tau_s} e^{-m\tau_s}
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

式(4.18)および(4.37)から、 $q=0$ の場合に対する偏差 $\varepsilon(t)$ の拡張 z 変換は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
E^*(z, m)_< &= z^{-1} + (1 + b_{1m_1}) z^{-2} \\
&+ \frac{z^{-2}}{d} \left[b_{1m_1} + \varphi_1(m) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-i\tau_s} z^{-(i+1)}) \right] \left[(1-d) + (v-1) \sum_{i=1}^P z^{-(i-1)} \right]
\end{aligned}$$

$$+ b_1 \zeta_p \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_{p-1} \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_p \bar{z}^{-(p+1)} \Big] \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} E^*(z, m)_> &= (1 + b_{1m2}) \bar{z}^{-1} \\ &+ \frac{\bar{z}^{-1}}{d} \left[b_{1m2} + \varphi_2(m) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-i\tau_s} \bar{z}^{-(i+1)}) \right] \left[(1-d) + (v-1) \sum_{i=1}^p \bar{z}^{-(i-1)} \right. \\ &\left. + b_1 \zeta_p \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_{p-1} \bar{z}^{-p} + b_2 \zeta_p \bar{z}^{-(p+1)} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

上式の逆 z 変換を求めれば、

$$\begin{aligned} \varepsilon(1, m)_< &= 1 \\ \varepsilon(i, m)_< &= \frac{v-1}{d} \left[b_{1m1} + \varphi_1(m) \frac{1 - e^{-(i-2)\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} \right] + \frac{1-d}{d} e^{-(i-3)\tau_s} \varphi_1(m), \quad 2 \leq i \leq p+1 \\ \varepsilon(p+2, m)_< &= \frac{v-1}{d} \varphi_1(m) \frac{1 - e^{-p\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} + \frac{1-d}{d} e^{-(p-1)\tau_s} \varphi_1(m) + \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} b_{1m1} \\ \varepsilon(p+3, m)_< &= \frac{v-1}{d} \varphi_1(m) \frac{1 - e^{-p\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} e^{-\tau_s} + \frac{1-d}{d} e^{-p\tau_s} \varphi_1(m) + \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \varphi_1(m) \\ &\quad + \frac{b_2 \zeta_p}{d} b_{1m1} \\ \varepsilon(j, m)_< &= \frac{v-1}{d} \varphi_1(m) e^{-(j-2-p)\tau_s} \frac{1 - e^{-p\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} + \frac{1-d}{d} e^{-(j-3)\tau_s} \varphi_1(m) \\ &\quad + \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} e^{-(j-p-3)\tau_s} \varphi_1(m) + \frac{b_2 \zeta_p}{d} e^{-(j-p-4)\tau_s} \varphi_1(m) \\ &\quad , j \geq p+4 \\ \varepsilon(i, m)_> &= \frac{v-1}{d} \left[b_{1m2} + \varphi_2(m) \frac{1 - e^{-(i-1)\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} \right] + \frac{1-d}{d} e^{-(i-2)\tau_s} \varphi_2(m), \quad 1 \leq i \leq p \\ \varepsilon(p+1, m)_> &= \frac{v-1}{d} \varphi_2(m) \frac{1 - e^{-p\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} + \frac{1-d}{d} \varphi_2(m) e^{-(p-1)\tau_s} + \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} b_{1m2} \\ \varepsilon(p+2, m)_> &= \frac{v-1}{d} \varphi_2(m) \frac{1 - e^{-p\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} e^{-\tau_s} + \frac{1-d}{d} \varphi_2(m) e^{-p\tau_s} + \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \varphi_2(m) \\ &\quad + \frac{b_2 \zeta_p}{d} b_{1m2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, m)_> &= \frac{v-1}{d} \varphi_2(m) e^{-(j-p-1)\tau_s} \frac{1-e^{-p\tau_s}}{1-e^{-\tau_s}} + \frac{1-d}{d} \varphi_2(m) e^{-(j-2)\tau_s} \\ &+ \frac{b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}}{d} e^{-(j-p-2)\tau_s} \varphi_2(m) + \frac{b_2\zeta_p}{d} e^{-(j-p-3)\tau_s} \varphi_2(m) \\ &, j \geq p+3 \end{aligned}$$

以上 (4.40)

式 (4.17); (4.37) の関係を用うるにより、上式は次のように書換えられる。

$$\varepsilon(1, m)_< = 1$$

$$\varepsilon(i, m)_< = v e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} e^{-(i-1)\tau_s} + 1-v, \quad 2 \leq i \leq p+1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(p+2, m)_< &= e^{-\tau_s} e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} (v e^{-p\tau_s} + 1-v + b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}) \\ &- (b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(p+3, m)_< = e^{-\tau_s} e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} \left[v e^{-(p+1)\tau_s} + (1-v) e^{-\tau_s} - \frac{b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}}{d} + b_2\zeta_p \right] - b_2\zeta_p$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, m)_< &= e^{-\tau_s} e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} e^{-(j-4)\tau_s} \left\{ e^{-2\tau_s} \left[v + (1-v) e^{p\tau_s} \right] - \frac{b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}}{d} e^{(p-1)\tau_s} \right. \\ &\left. - \frac{b_2\zeta_p}{d} e^{p\tau_s} \right\}, \quad j \geq p+4 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(i, m)_> = v e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} e^{-(i-1)\tau_s} + 1-v, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\varepsilon(p+1, m)_> = e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} \left[v e^{-p\tau_s} + 1-v + b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1} \right] - (b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1})$$

$$\varepsilon(p+2, m)_> = e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} \left[v e^{-(p+1)\tau_s} + (1-v) e^{-\tau_s} - \frac{b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}}{d} + b_2\zeta_p \right] - b_2\zeta_p$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, m)_> &= e^{\tau_s} e^{-m\tau_s} e^{-(j-3)\tau_s} \left\{ e^{-2\tau_s} \left[v + (1-v) e^{p\tau_s} \right] - \frac{b_1\zeta_p + b_2\zeta_{p-1}}{d} e^{(p-1)\tau_s} \right. \\ &\left. - \frac{b_2\zeta_p}{d} e^{p\tau_s} \right\}, \quad j \geq p+3 \end{aligned} \quad (4.41)$$

これらの関係式における $\varepsilon(k, m)_<$ および $\varepsilon(k, m)_>$ は図 4.7 に示すように、 $(k-1)\tau_s \leq t \leq k\tau_s$ なるサンプリング時点間の偏差の連続応答を表わすものである。上式より明らかなように、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon(j, m) < 0 \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon(j, m) > 0 \end{aligned} \right\} (4.42)$$

すなわち、ここに取上げた系においては一旦飽和を生じたり、外乱を受けたりすれば有限時間整定性は失われるが、

一時的な外乱や有限回の飽和の場合には、その制御動作は

$t \rightarrow \infty$ においては目標値ステップに一致し、オフ・セットを生じない。

式(4.41)を用うることにより、次に示すように偏差 $\varepsilon(t)$ の自乗制御面積を計算することができる。

いま、偏差 $\varepsilon(t)$ の自乗制御面積を $S(v)$ とすれば、 $S(v)$ は、

$$S(v) = \int_0^{\infty} [\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\infty)]^2 d\tau \quad (4.43)$$

で定義される。一方 $\varepsilon(k, m)$ は図4.8に示すように、 $\varepsilon(\tau)$ を $\tau = 0, \tau_s, 2\tau_s, \dots$ 毎に区切

ったとき、 $(k-1)\tau_s \leq \tau \leq k\tau_s$ なる区間の

$\tau = (k-1)\tau_s + m\tau_s$ ($m = 0 \sim 1$) なる時点における

$\varepsilon(\tau)$ の値、すなわち

$\varepsilon((k-1)\tau_s + m\tau_s)$ を与え

るものである。したがって

上記区間の始点 $\tau = (k-1)\tau_s$

から τ' ($\tau' = 0 \sim \tau_s$) なる

時点の値 $\varepsilon((k-1)\tau_s + \tau')$ を知るには m として

$$m\tau_s = \tau' \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{\tau'}{\tau_s} \quad (4.44)$$

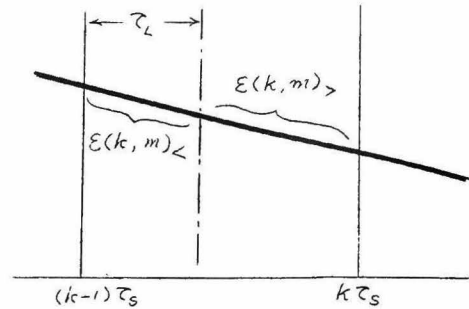


図4.7 サンプルング時点間の応答

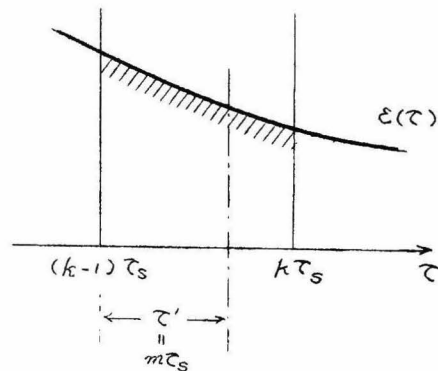


図4.8 局部時間 τ' と m の関係

を $\varepsilon(k, m)$ に代入する必要がある。いまここに取り上げた問題のようにオフ・セット零、すなわち $\varepsilon(\infty) = 0$ の場合、

$$\begin{aligned} S(v) &= \int_0^\infty \varepsilon^2(\tau) d\tau = \sum_{k=1,2,\dots}^\infty \int_0^{\tau_s} \varepsilon(k-1, \tau_s + \tau')^2 d\tau' \\ &= \sum_{k=1,2,\dots}^\infty \int_0^{\tau_s} \varepsilon(k, m)^2 d\tau' = \tau_s \sum_{k=1,2,\dots}^\infty \int_0^1 \varepsilon(k, m)^2 dm \end{aligned} \quad (4.45)$$

本例における如く 系自体がむだ時間 τ_L を含み $\varepsilon(k, m)$ が、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(k, m) &= \varepsilon(k, m)_< & 0 \leq m \leq \frac{\tau_L}{\tau_s} \\ \varepsilon(k, m) &= \varepsilon(k, m)_> & \frac{\tau_L}{\tau_s} \leq m \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

なる形に分離される場合には偏差の自乗制御面積 $S(v)$ は次式で表わされる。

$$S(v) = \tau_s \left\{ \sum_{k=1,2,\dots}^\infty \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon(k, m)_<^2 dm + \sum_{k=1,2,\dots}^\infty \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon(k, m)_>^2 dm \right\} \quad (4.47)$$

式(4.41)より、

$$\begin{aligned} S(v) &= \tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \left[\varepsilon(1, m)_<^2 + \sum_{i=2}^{p+1} \varepsilon(i, m)_<^2 + \varepsilon(p+2, m)_<^2 + \varepsilon(p+3, m)_<^2 + \sum_{j=p+4}^\infty \varepsilon(j, m)_<^2 \right] dm \\ &\quad + \tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \left[\sum_{i=1}^p \varepsilon(i, m)_>^2 + \varepsilon(p+1, m)_>^2 + \varepsilon(p+2, m)_>^2 + \sum_{j=p+3}^\infty \varepsilon(j, m)_>^2 \right] dm \end{aligned} \quad (4.48)$$

上式の積分の結果は次の関係で与えられる。

$$\begin{aligned} S(v) &= \tau_L + \frac{1}{2} \left[x_1 + x_8 + (1 - e^{-2\tau_s})(x_4^2 + x_6^2) \right] \\ &\quad + 2 \left[x_2 + (1 - e^{-\tau_s})(x_4 x_5 + x_6 x_7) \right] \\ &\quad + \tau_s \left[x_3 + x_5^2 + x_7^2 \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (1 - a_1^{2p}) v^2 \\
 x_2 &= (1 - (-a_1)^p) (1 - v) v \\
 x_3 &= p (1 - v)^2 \\
 x_4 &= 1 - (1 - (-a_1)^p) v - x_5 \\
 x_5 &= -(b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) \\
 x_6 &= e^{-\tau_s} - (1 - (-a_1)^p) e^{-\tau_s} v + \frac{x_5}{1 - e^{-\tau_s}} - x_7 \\
 x_7 &= -b_2 \zeta_p \\
 x_8 &= \left\{ e^{-2\tau_s} \left[1 - (1 - (-a_1)^p) v \right] + \frac{e^{-\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} x_5 + \frac{x_7}{1 - e^{-\tau_s}} \right\}^2
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

(いま特別の場合として、 $v = d = 1 / (1 - e^{-\tau_s})$) のときを考える。この場合、式(4.20)より明らかなように、制御装置出力 f は図4.9に示すようになり、 f_1 のみが飽和値 ψ に一致し、 f_2, f_3, \dots はすべて線形領域にある。したがって、このときの偏差 $\varepsilon(\tau)$ の自乗制御面積は式(4.50)において $p = 1$, $v = d$, ζ_i ($i = 1 \sim 8$) $= 0$ とおくことにより 式(4.49)から計算できる。すなわち、

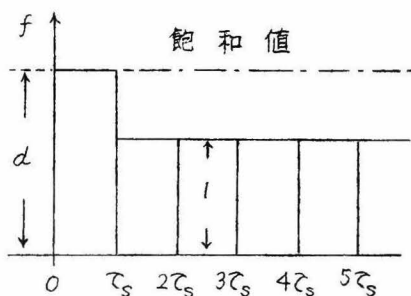


図4.9 非飽和時における制御装置出力(ホールド値)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (1 - e^{-2\tau_s}) d^2 \\
 x_2 &= (1 - e^{-\tau_s}) (1 - d) d = 1 - d \\
 x_3 &= (1 - d)^2 \\
 x_4 &= 1 - (1 - e^{-\tau_s}) d = 0 \\
 x_5 &= 0 \\
 x_6 &= e^{-\tau_s} - (1 - e^{-\tau_s}) e^{-\tau_s} d = 0 \\
 x_7 &= 0 \\
 x_8 &= e^{-4\tau_s} [(1 - e^{-\tau_s}) d + e^{\tau_s}]^2 e^{-2\tau_s} = 0
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\therefore S(v) = \tau_s + \frac{1}{2} d^2 (1 - e^{-2\tau_s}) + 2 d (1 - d) + \tau_s (1 - d)^2$$

$$= \tau_L + d^2 \left[\frac{1 - e^{-2\tau_s}}{2} - 2e^{-\tau_s}(1 - e^{-\tau_s}) + \tau_s e^{-2\tau_s} \right] \quad (4.52)$$

一方、この場合の現象は線形応答であるから 偏差 $\varepsilon(\tau)$ は図 4.4 に示す有限整定時間応答を呈する。したがって、その自乗制御面積は図より、

$$\begin{aligned} S(v) &= \tau_L + \int_{\tau_L}^{\infty} \left[\frac{e^{-(\tau-\tau_L)} - e^{-\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} \right]^2 \left[H(\tau - \tau_L) - H(\tau - \tau_s - \tau_L) \right] d\tau \\ &= \tau_L + d^2 \left[\frac{1 - e^{-2\tau_s}}{2} - 2e^{-\tau_s}(1 - e^{-\tau_s}) + \tau_s e^{-2\tau_s} \right] \quad (4.53) \end{aligned}$$

となり、式(4.52)の結果と一致する。つぎに制御対象 $e^{-\tau_s}/(s+1)$ に大きさ1のステップを投入した場合を考えよう。このときの現象は、図 4.3 に示した開ループ系において制御装置出力が常時飽和特性の飽和値 $v=1$ より大きく、したがって制御対象には大きさ1のパルス列をホールドしたもの すなわち単位ステップが投入された場合に相当する。故に式(4.50)における v , p , ζ_p および ζ_{p-1} はそれぞれ $v=1$, $p=\infty$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \zeta_p = 0$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \zeta_{p-1} = 0$ と考えればよい。したがって、

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= 0, & x_3 &= 0, & x_4 &= 0, & x_5 &= 0, \\ x_6 &= 0, & x_7 &= 0, & x_8 &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\therefore S(v) = \tau_L + \frac{1}{2} \quad (4.55)$$

一方、制御対象に単位ステップを投入した場合、目標値1からの差の自乗制御面積は

$$S(v) = \tau_L + \int_{\tau_L}^{\infty} e^{-2(\tau-\tau_L)} d\tau = \tau_L + \frac{1}{2} \quad (4.56)$$

となり両者の結果は一致する。

以上説明した両極端の場合を除き、一般の飽和状態における偏差の自乗制御面積を求めるには、式(4.50)よりわかるように制御装置出力が線形領域に入るまでに要するサンプリング回数 p および、線形領域に入る直前における飽和量 ζ_p , ζ_{p-1} の値を知る必要がある。これらの値は

後に示すように式(4.20)の関係から図式的に比較的容易に求めることができる。

4.2.5 $q \neq 0$ の場合に対する自乗制御面積の計算式

$q \neq 0$ の場合には、偏差 $\varepsilon(t)$ の拡張変換としては式(4.34), (4.35)の各第3項も関係するようになり、自乗制御面積の計算式は前者に比べ相当複雑になる。ここでは得られた計算式のみを記載する。^{*}

$$\begin{aligned}
 S(v) = & \tau_c + \frac{1}{2} \left\{ x_1 + (1 - e^{-2\tau_s}) \left[x_4^2 + x_6'^2 + \sum_{i=1}^{q/2} (x_{10}^2 + x_{12}^2) + \sum_{j=1}^{\infty} (x_{13}^2 + x_{14}^2) \right] \right\} \\
 & + 2 \left\{ x_2 + (1 - e^{-\tau_s}) \left[x_4 x_5 + x_6' x_7' + \sum_{i=1}^{q/2} (x_{10} x_9 - x_{12} x_{11}) + \sum_{j=1}^{\infty} x_{14} x_{15} \right] \right\} \\
 & + \tau_s \left\{ x_3 + x_5^2 + x_7'^2 + \sum_{i=1}^{q/2} (x_{11}^2 + x_9^2) + \sum_{j=1}^{\infty} x_{15}^2 \right\} \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$x_6' = G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I,$$

$$x_7' = -b_2 \zeta_p + q$$

$$x_9 = K(-b_2)^i + J$$

$$x_{10} = G(-b_2)^i + H(-a_1)^{2(i-1)} + I$$

$$x_{11} = J$$

$$x_{12} = G'(-b_2)^i + H(-a_1)^{2i-3} - I$$

$$x_{13} = [G'(-b_2)^{q/2} + G''](-b_2)^{j+1} + [H(-a_1)^q + H'](-a_1)^{2j-1}$$

$$x_{14} = [G(-b_2)^{q/2} + G'''](-b_2)^j + [H(-a_1)^q + H'](-a_1)^{2(j-1)}$$

$$x_{15} = [K(-b_2)^{q/2} + K'](-b_2)^j$$

$$G = \frac{2 - e^{-\tau_s} - e^{\tau_c}}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_c} + 1} (b_1 \zeta_p + v - 1)$$

$$G' = \frac{e^{\tau_s}(1 - e^{-\tau_s})^2}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_c} + 1} (b_1 \zeta_p + v - 1)$$

* (4.57), (4.58)の誘導については附録6参照のこと。

$$G'' = - \frac{e^{\tau_s} (1 - e^{-\tau_s})^2}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1} (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1)$$

$$G''' = - \frac{2 - e^{-\tau_s} - e^{\tau_L}}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1} (b_1 \zeta_{p-q} + v - 1)$$

$$H = e^{-2\tau_s} [1 - (1 - (-a_1)^p) v] - \frac{e^{-\tau_s}}{1 - e^{-\tau_s}} (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) - \frac{b_2 \zeta_p}{1 - e^{-\tau_s}}$$

$$+ \frac{(1 - e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{\tau_L})}{(1 + e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1)} [b_2 \zeta_p - e^{-2\tau_s} (b_2 \zeta_p + 1 - v)]$$

$$H' = - \frac{(1 - e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{\tau_L})}{(1 + e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1)} [b_2 \zeta_{p+q} - e^{-2\tau_s} (b_2 \zeta_{p+q} + 1 - v)]$$

$$I = \frac{2(1-v)}{1 + e^{-\tau_s}}$$

$$I' = b_2 \zeta_{p+q} - \frac{1 - e^{-\tau_s}}{1 + e^{-\tau_s}} (1 - v)$$

$$J = v - 1$$

$$K = -(b_1 \zeta_p + v - 1)$$

$$K' = b_1 \zeta_p + v - 1 \quad \text{以上 (4.58)}$$

いま $q=0$ の場合を考えれば $\zeta_{p+q} = \zeta_p$ にして、 $\sum_{i=1}^{q/2} ()$ なる項はすべて 0 であり、かつ $x'_6 = x_6$, $x'_7 = x_7$, $\sum_{j=1}^{\infty} (x_{13}^2 + x_{14}^2) = x_8 / (1 - e^{-2\tau_s})$,

$x_{15} = 0$ が成立し、さきに求めた $q=0$ の場合に対する自乗制御面積の計算式 (4.49) と一致する。

$q \neq 0$ の場合においても、任意の飽和状態における自乗制御面積を求めるには、式 (4.57) および (4.58) より明らかなように、制御装置出力が連続して飽和を越す回数 p 、一つおきに飽和を越す回数 q および連続飽和から一つおきの飽和に移る直前における飽和量 ζ_p , ζ_{p-1} と、飽和から離れる直前における飽和量 ζ_q の値を知る必要がある。これらの値は次に示すように式 (4.31) の関係から比較的容易に求めることができる。

なお、 $q=0$, $q \neq 0$ いずれの場合においても、制御装置出力が連続して2回飽和を離れた場合には、すでに述べたように以後再び飽和を起すことなく線形動作に移る。

4.2.6 $P, q, \zeta_p, \zeta_{p-1}$ および ζ_q の図式求法

さきに述べたように制御装置出力が飽和を伴う場合の偏差 $\varepsilon(t)$ の過渡変化、飽和値 v を与えた場合の偏差の自乗制御面積 $S(v)$ を求めるには、制御装置出力が線形域に入るまでの連続飽和サンプリング回数 p , 1つおきの飽和サンプリング回数 q , およびこれらの状態から離れる直前の飽和量 $\zeta_p, \zeta_{p-1}, \zeta_q$ を知る必要がある。これらの値はさきに述べたように、式(4.20)の諸関係を利用することにより図4.10に示すような作図から簡単に求められる。この図を利用すれば、飽和値 v を与えればその場合における各サンプリング時点毎の制御装置出力 f_i , 飽和量 ζ_i を読取ることができる。

作図法を簡単に説明すれば、まず ζ_1 は $f_1 > v$ の場合 $\zeta_1 = v - f_1$, $f_1 \leq v$ の場合0であるから図において直線群 e, g, h で表わされる。したがって f_2 は $f_2 = 1 + b_1 \zeta_1$ なる関係より直線群 e', g', h' で与えられる。つぎに ζ_2 が現れるのは図より $v \leq g_2$ 、したがって ζ_2 は e, g_2, h_2 なる直線群で表わされる。更に f_3 は e', g', g_2', h_3' を結ぶ直線群で与えられることは $f_3 = 1 + b_1 \zeta_2 + b_2 \zeta_1$ なる関係より明らかである。 f_4 は $f_4 = 1 + b_2 \zeta_2 + b_1 \zeta_3$ なる関係から、点 g_2'' において $f_i = 1$ なる直線を離れることがわかる。以上の説明より例えば次のようなことがこの図より判明する。すなわち、 $v \geq g_1$ においては全然飽和を生ぜず、 $g_1 < v < g_2$ においては $\tau = 0$ における制御装置出力 f_i のみが飽和し、その他は飽和しない。しかしながら、 f_1 の飽和の影響は f_2, f_3 に現れ それらの値は1から変化する。

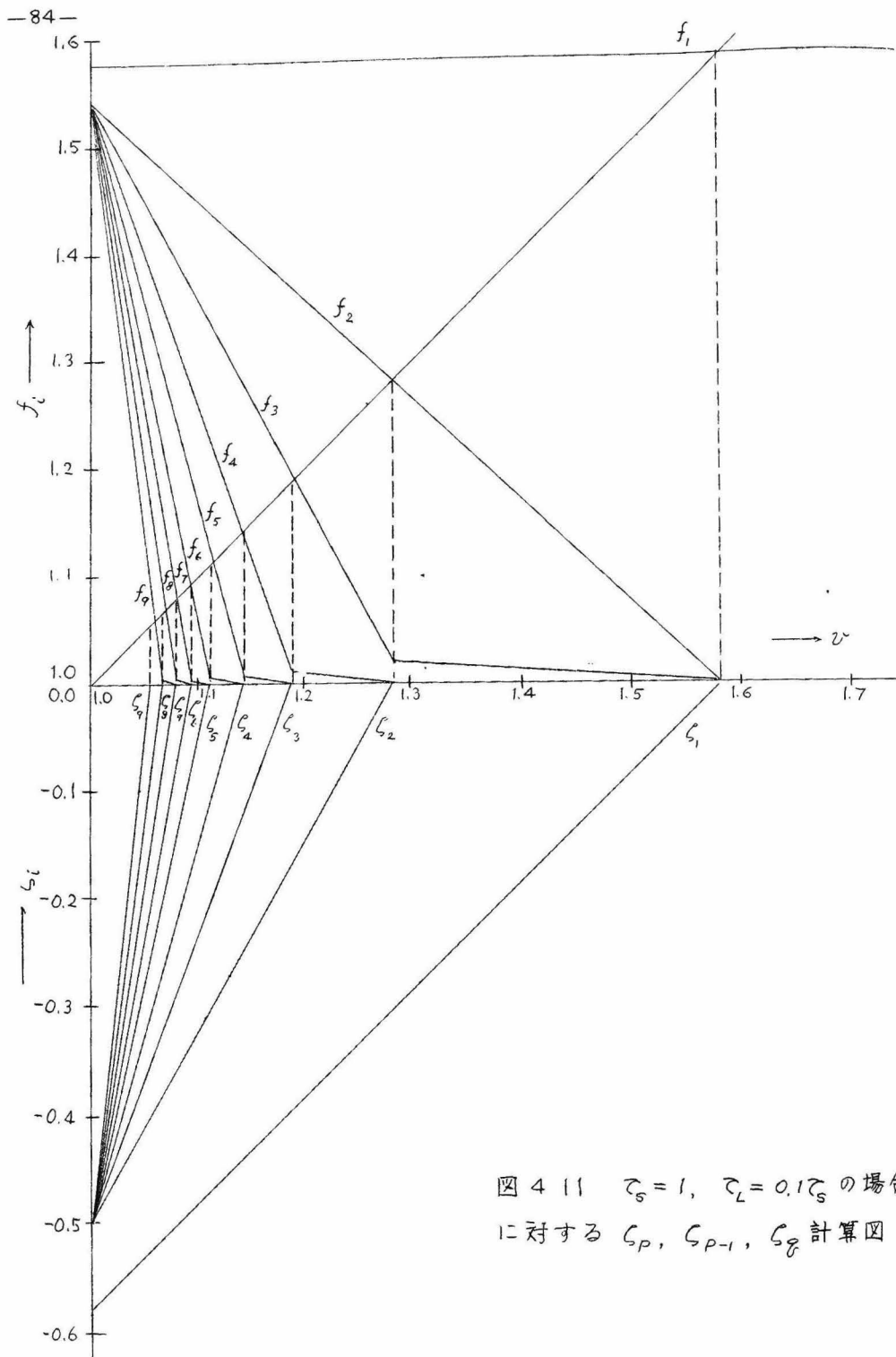


図 4 11 $\tau_s = 1$, $\tau_L = 0.1\tau_s$ の場合
に対する ζ_p , ζ_{p-1} , ζ_δ 計算図

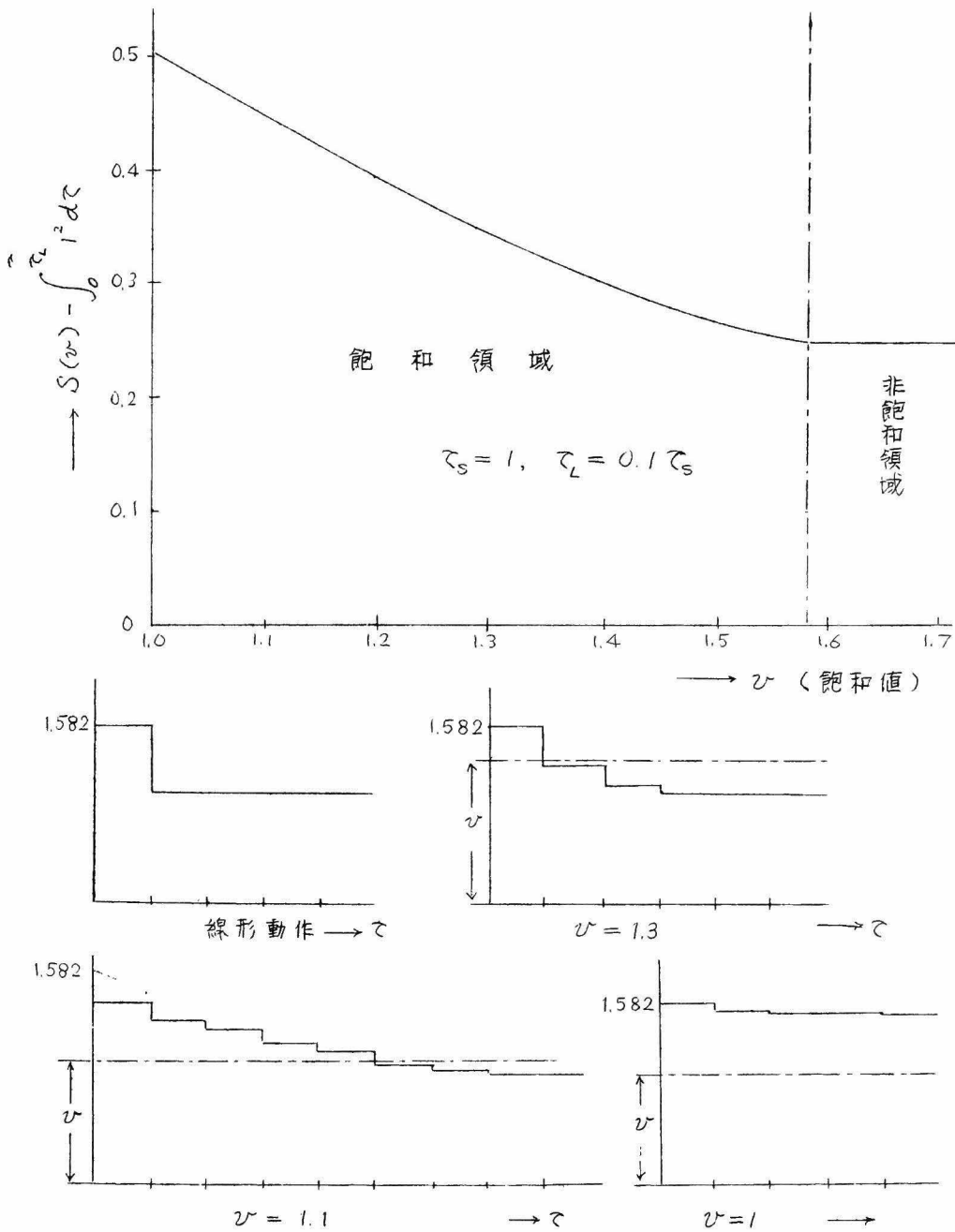


図 4.12 $\tau_s = 1, \tau_L = 0.1 \tau_s$ の場合における飽和値とインデシャル応答に対する自乗制御面積との関係および飽和時における制御装置出力（ホールド値）波形の例

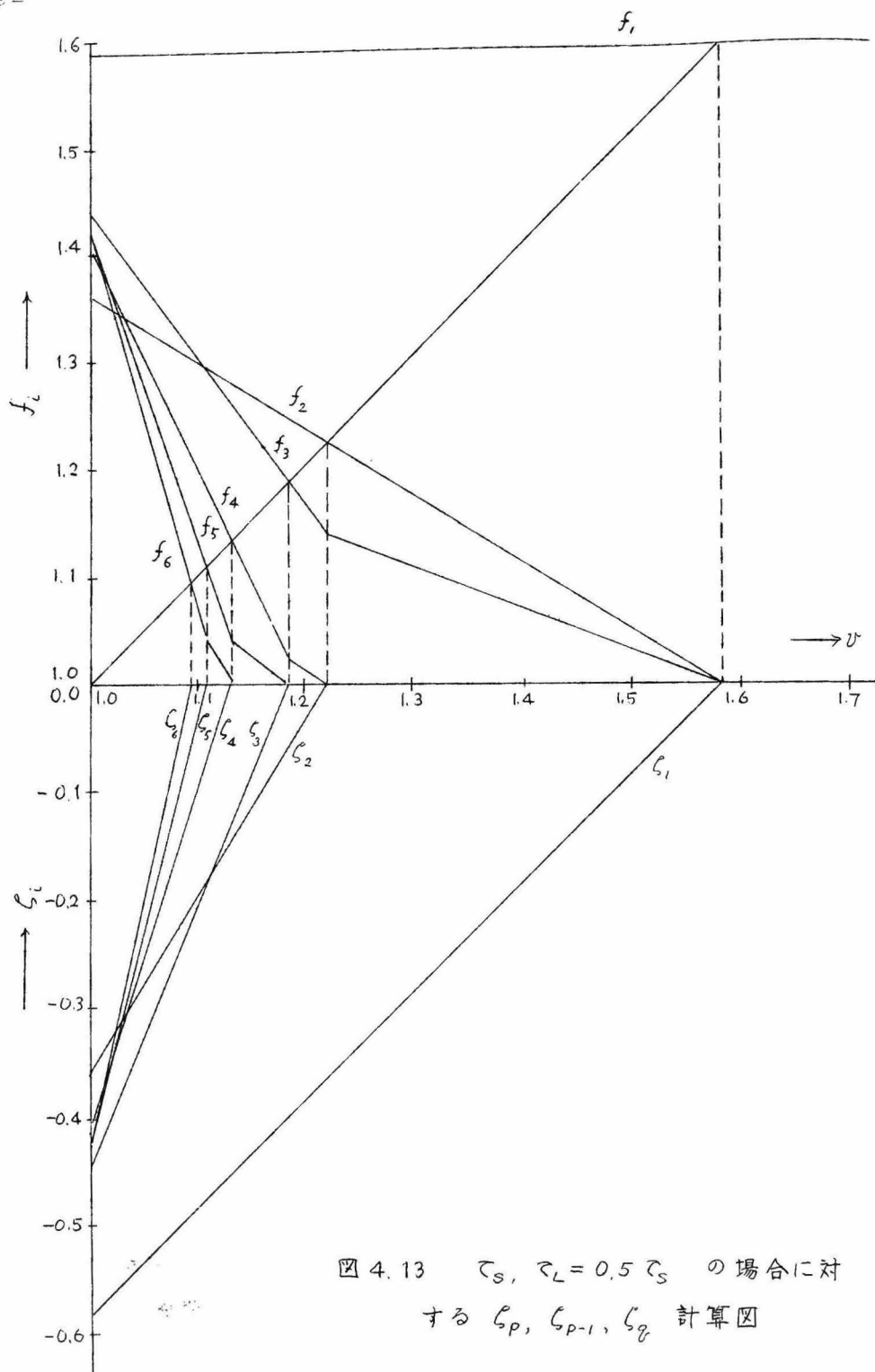


図 4.13 $\tau_S, \tau_L = 0.5 \tau_S$ の場合に対する $\zeta_p, \zeta_{p-1}, \zeta_q$ 計算図

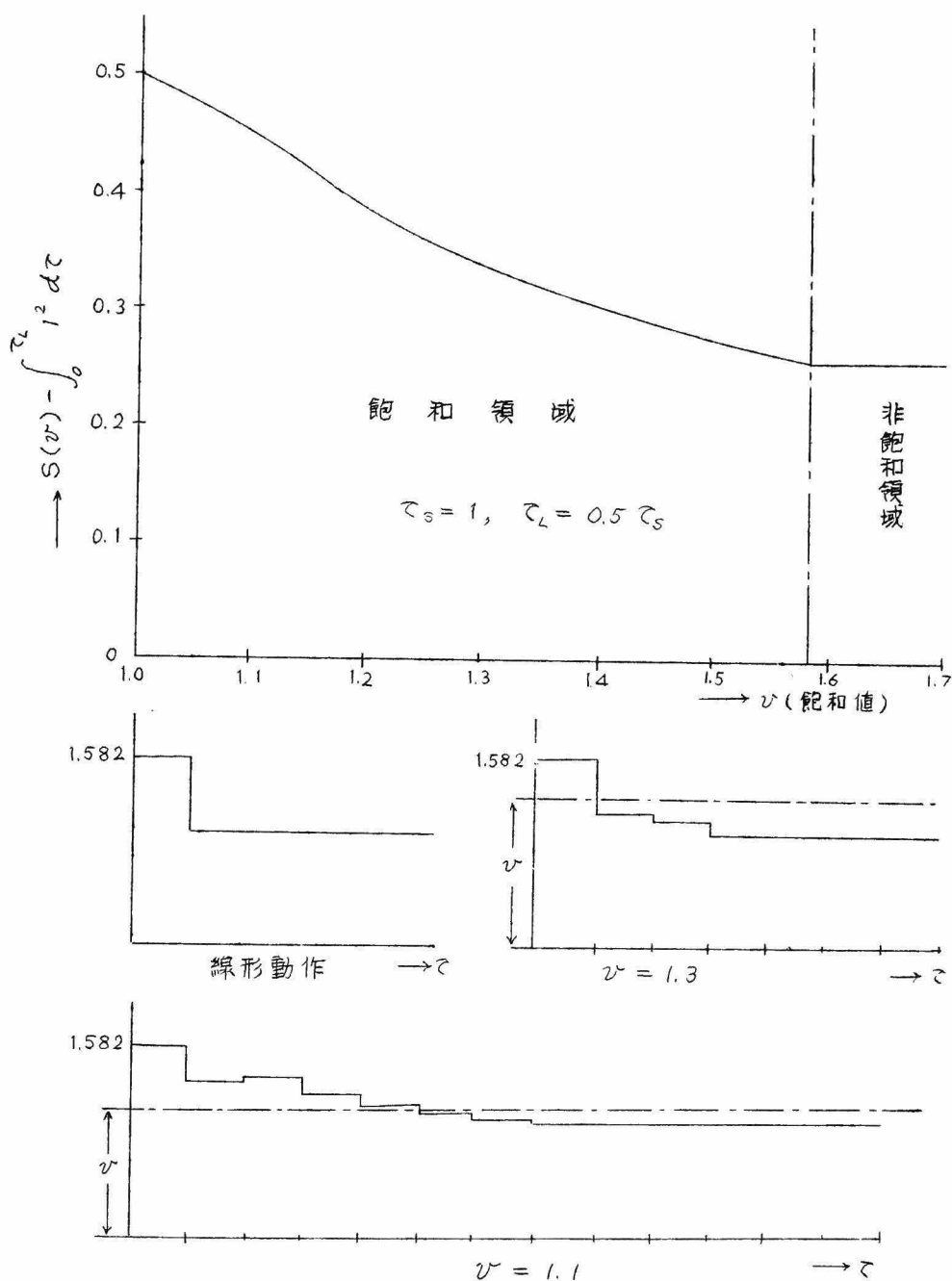


図 4 14 $\tau_s = 1, \tau_L = 0.5 \tau_s$ の場合における飽和値とインデシャル応答に対する自乗制御面積との関係および、飽和時における制御装置出力（ホールド値）波形の例

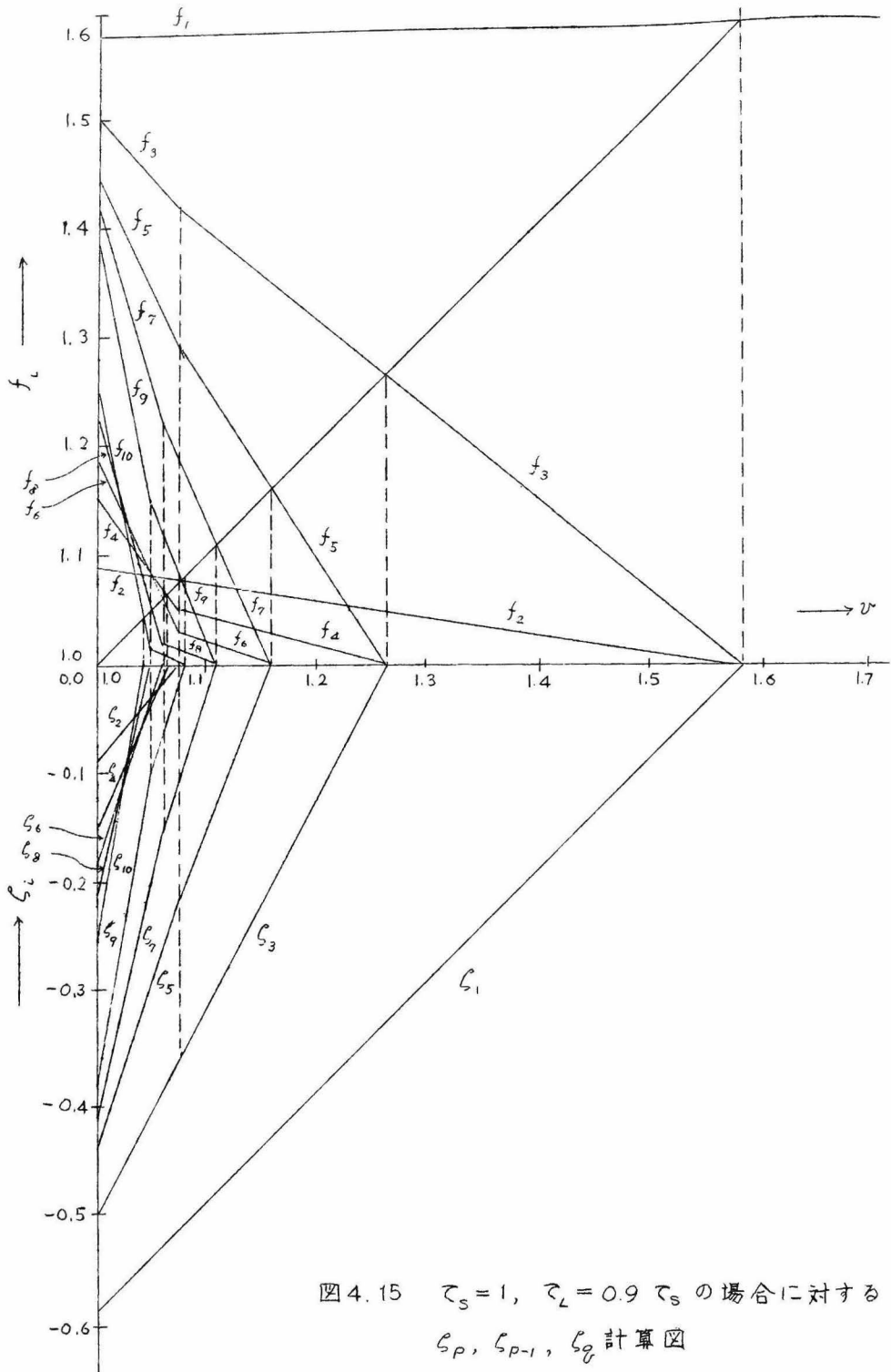


図 4.15 $\tau_s = 1, \tau_L = 0.9$ の場合に対する
 g_P, g_{P-1}, g_Q 計算図

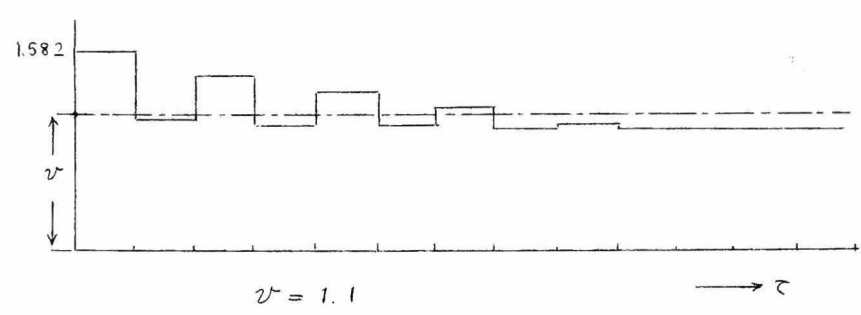
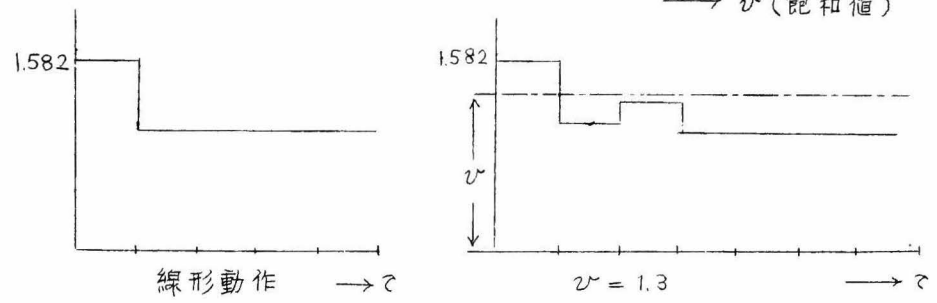
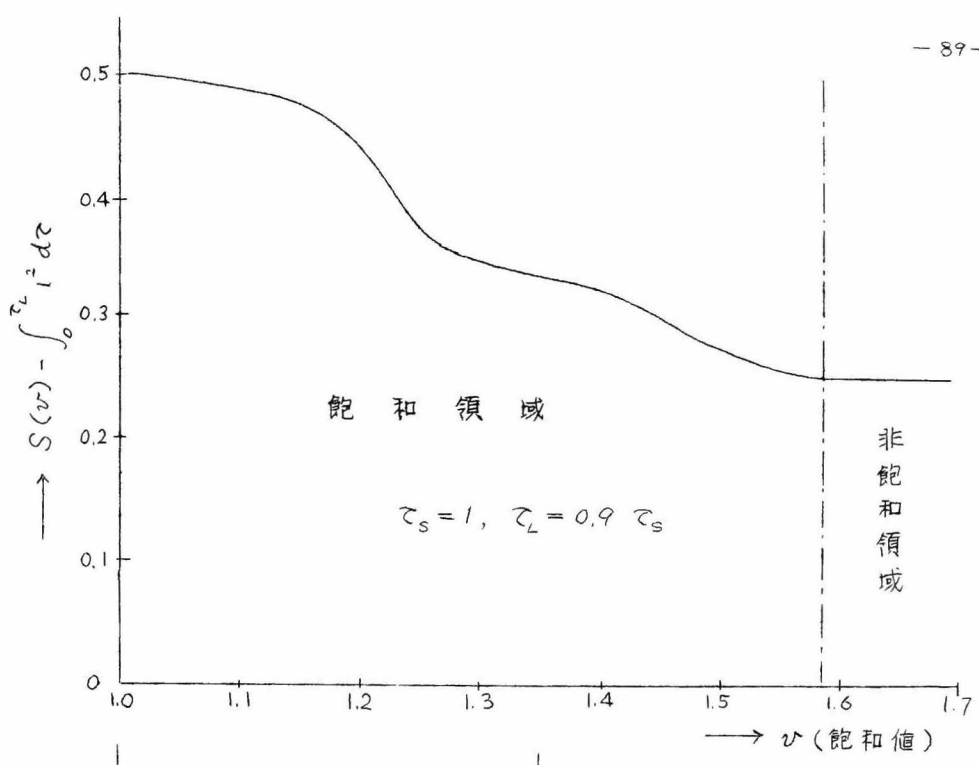
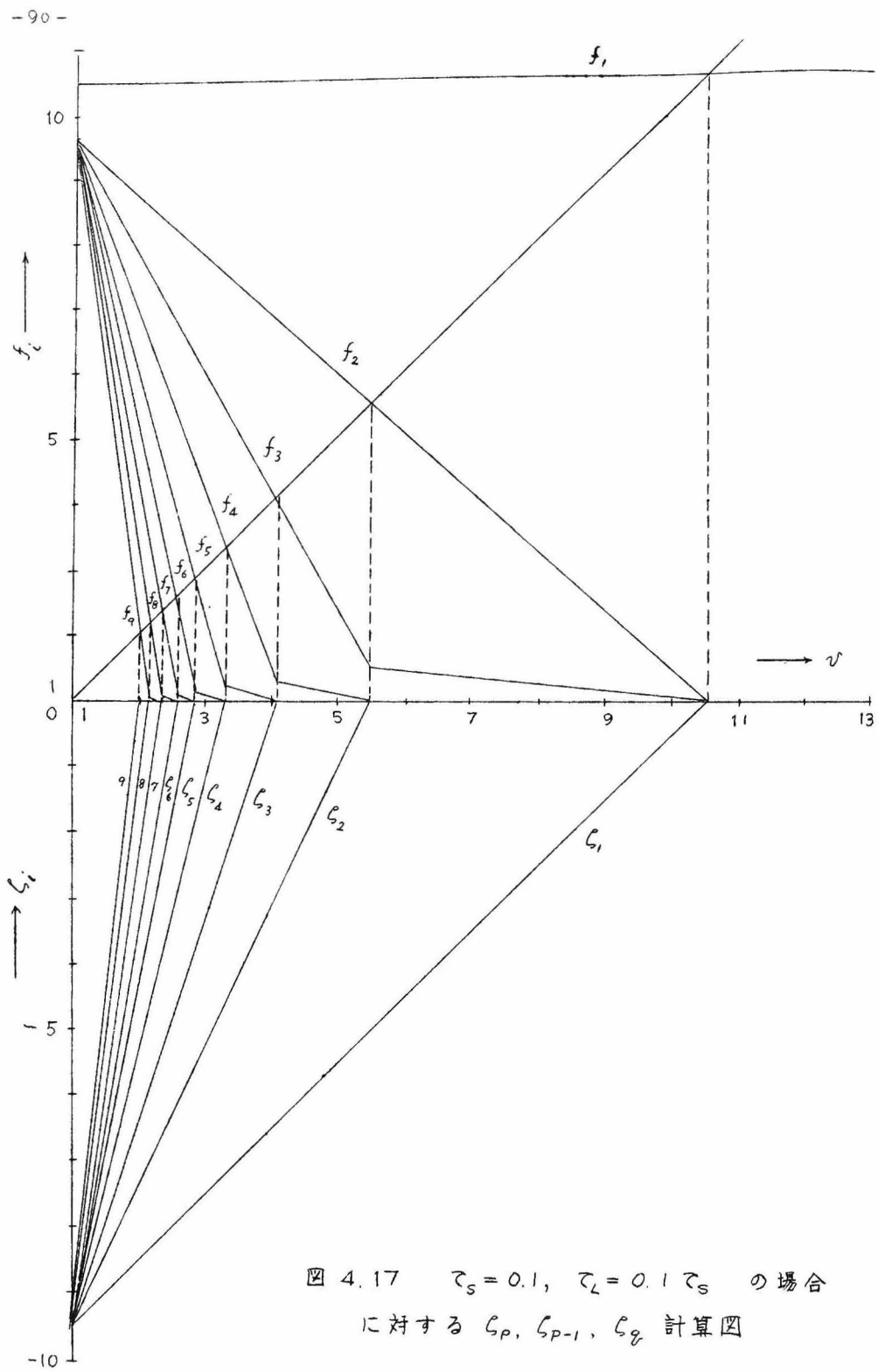


図 4.16 $\tau_s = 1, \tau_L = 0.9 \tau_s$ の場合における飽和値とインデシャル応答に対する自乗制御面積との関係および、飽和時における制御装置出力（ホールド値）波形の例



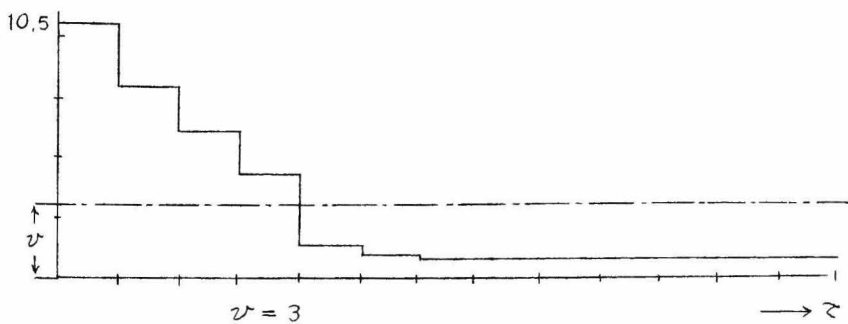
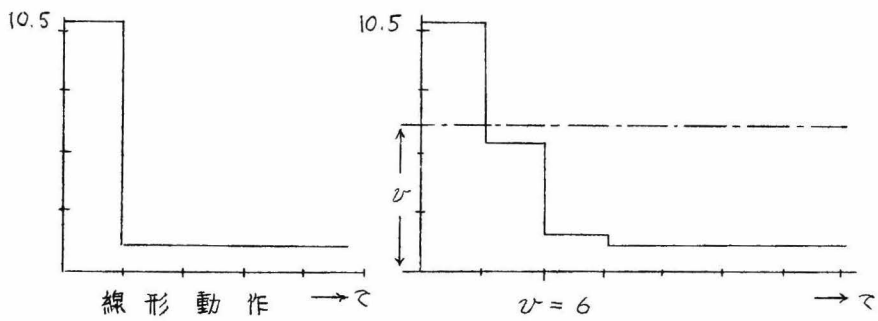
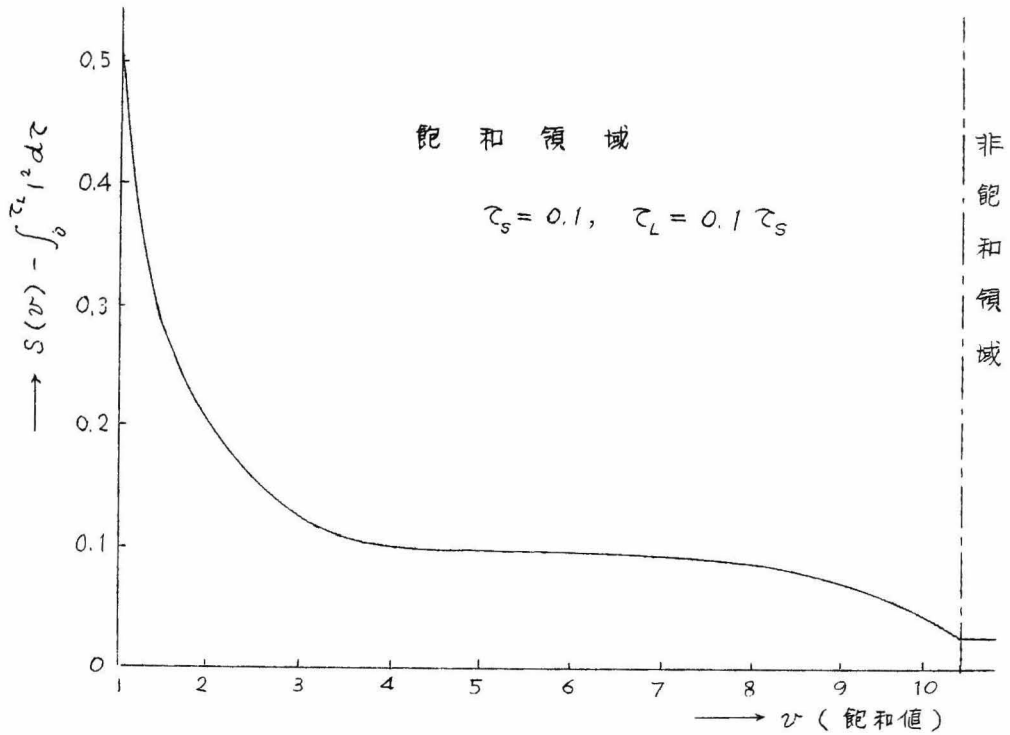


図 4.18 $\tau_s = 0.1, \tau_L = 0.1 \tau_s$ の場合における飽和値とインデシャル応答に対する自乗制御面積との関係および、飽和時における制御装置出力（ホールド値）波形の例

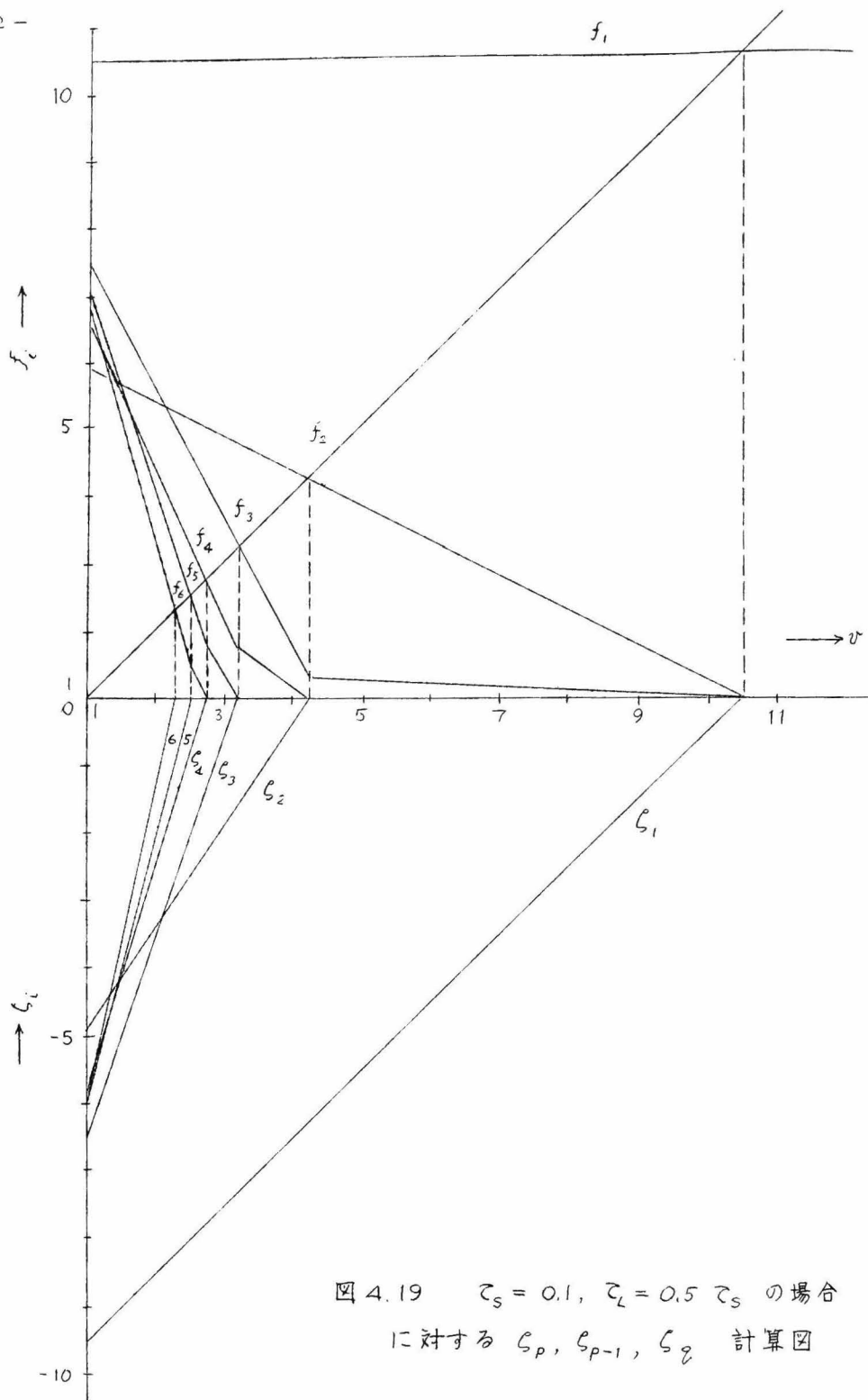


図 4.19 $\tau_s = 0.1, \tau_L = 0.5$ の場合
に対する L_p, L_{p-1}, L_q 計算図

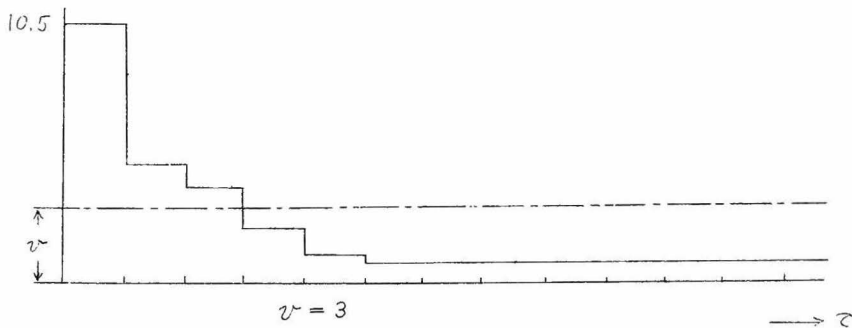
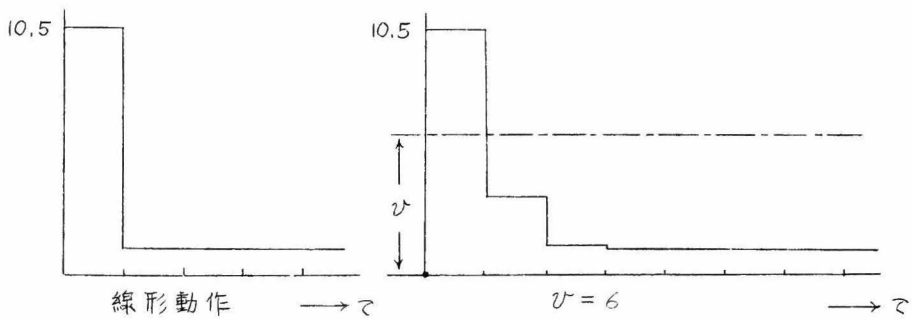
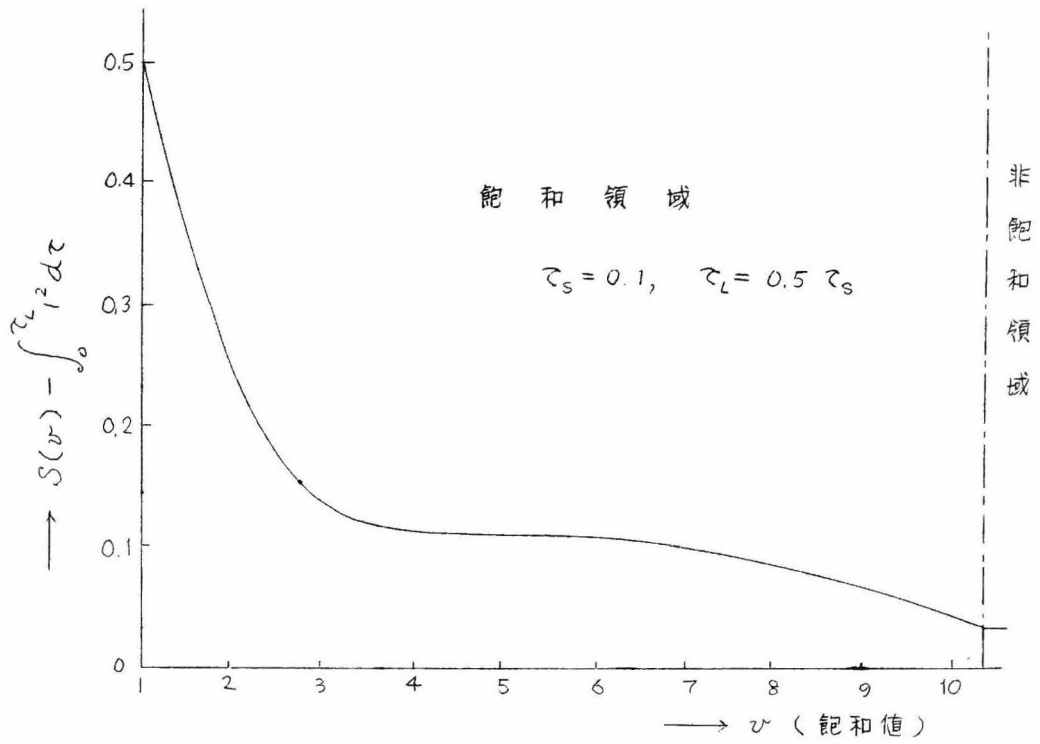


図 4.20 $\tau_s = 0.1, \tau_L = 0.5 \tau_s$ の場合における飽和値とインデシャル応答に対する自乗制御面積との関係および飽和時における制御装置出力(ホールド値)波形の例

第5章 サンプル値系における飽和による乱調現象

5.1 サンプル値系における条件付安定現象

前節 2.1 において述べたように、E. I. Jury, W. Schroeder の方法によるサンプル値有限整定時間応答用制御装置を用いた場合、飽和等により一度制御装置出力が影響を受ければ、その系の有限整定の性質は全

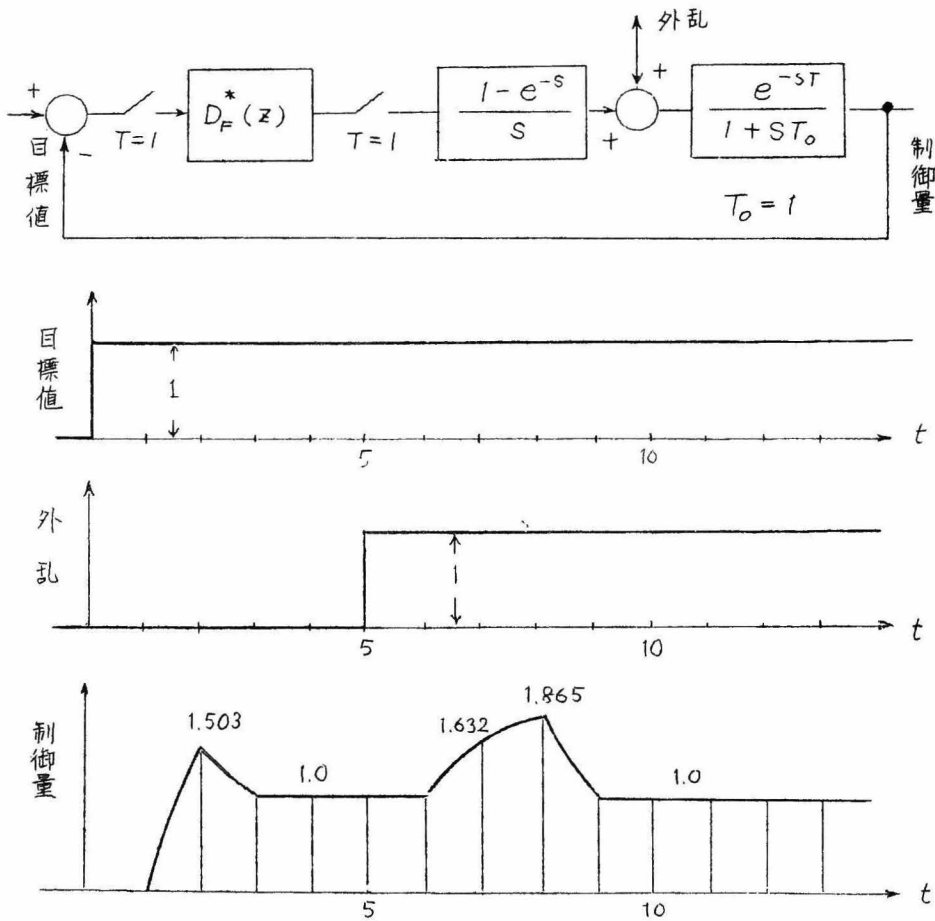


図 5.1 外乱を考慮した有限整定時間応答系

く失われてしまう。これに対し、飽和或は外乱等により一旦、制御装置出力にくるいを生じて、制御装置出力が飽和や外乱等の影響より解放された後、再び有限整定特性を回復するサンプル値系用制御装置の設計法が京都大学、近藤文治、曾我正和により提唱された。図 5.1 はこの方法により設計された系のステップ状目標値入力、および、これと異なった時刻に加わったステップ状外乱に対する系の過渡応答を示したものである。しかしながら、この系において制御装置出力が飽和を生ずる場合、後の例に示すような初期入力の大きさによってその発生、非発生のきまる乱調現象を引起す。

一般に連続制御系において、その安定問題は系が線形領域で動作している限り、系に加えられる入力および外乱の大小には無関係で、系の定数によって決定される。ところが非線形特性が含まれる場合には、系の安定、不安定はただ単に系の定数のみならず系への入力や外乱の大きさによって左右されることは、いわゆる堅い振動 (hard self-excitation) として知られている。さきに述べたように、このような条件付安定現象は単に連続系のみならず、非線形特性を含むサンプル値制御系においても見られる。

本章においてはサンプル値系における条件付安定現象について考える。

5.2 サンプル値系における飽和による乱調現象の実際例

以下に示すところの飽和に起因する乱調現象は、それぞれ $G(s) = e^{-Ts}/(1+s)$, $e^{-2Ts}/(1+s)$ および $1/s(1+s)$ なる伝達関数を有する制御対象に対し、上記飽和および外乱を考りよした有限整定時間応答用制御装置を用いた場合見られるものである。これらの制御装置は、図 5.1 に示すように飽和および外乱による影響を系の出力、すなわち制御量から有限時間内 (サンプリング周期 T の整数倍) に全く消滅させるものであるが、飽和の場合には制御装置出力が飽和から放れて線形域において再び動作することを前提としている。この要求が充されない場合

ここに見られるような乱調現象が発生する。

5.2.1 実際例 その1

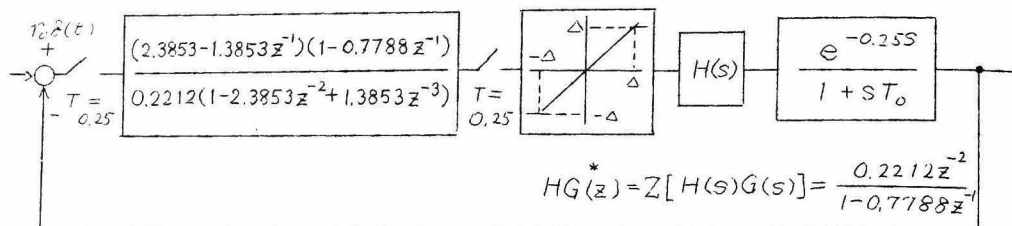


図 5.2 周期 $2T$ の周期的不安定平衡状態を有する系

図 5.3(a), (b) は初期入力として、 $t=0$ における大きさ r_0 のインパルスを加えたときの制御装置出力のホールド値および制御量を示したものである*。図より明らかなようにインパルス状入力 r_0 の値、 $r_0=0.4831\Delta$ を界にして周期がサンプリンク周期 T の 2 倍の乱調を呈する。ただし、このリミット サイクルは不安定平衡点であり、周期 $2T$ の現象を持続させることはできず、現象は微小外乱等の影響により発散 収斂いずれかを呈する。収斂する場合には、その応答は有限整定時間応答を示し、

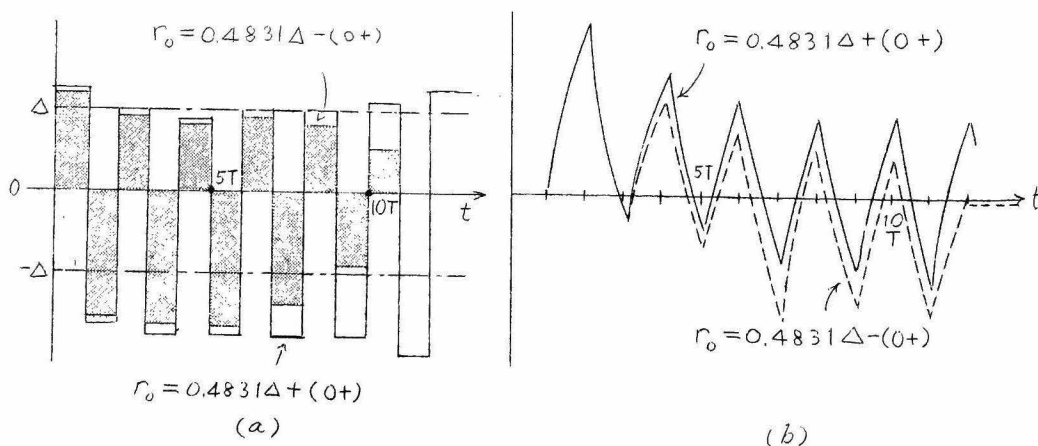


図 5.3 図 5.2 の系において見られる乱調現象

* これらの波形は富士通信機 FACOM 314 プロセス・シミュレータを用いて計算したもの。

図に示すように一定サンプリング回数後、偏差は零となる。平衡点の安定判別については後に第6章において述べる。

5.2.2 実際例 その2

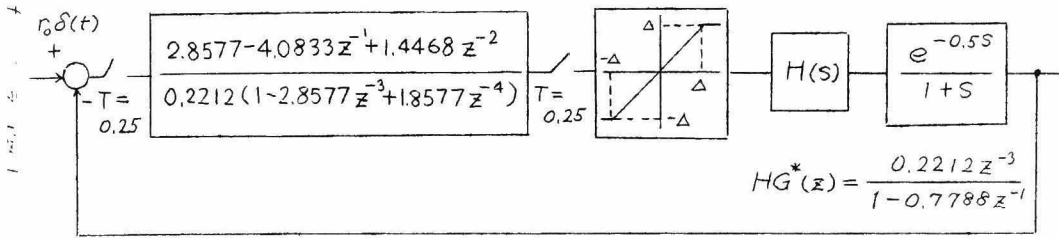


図 5.4 周期 $3T$ の周期的不安定平衡状態を有する系

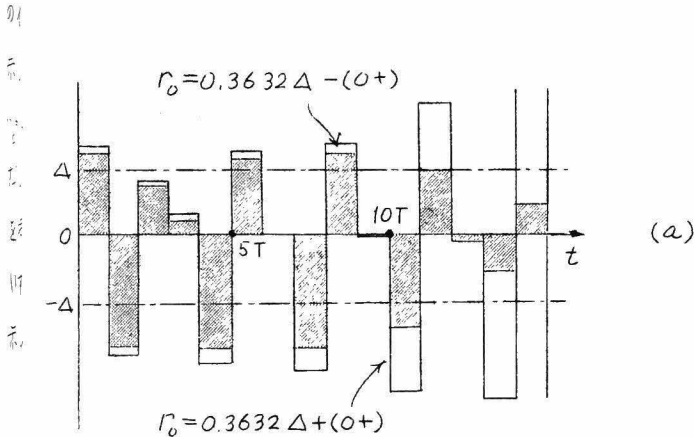
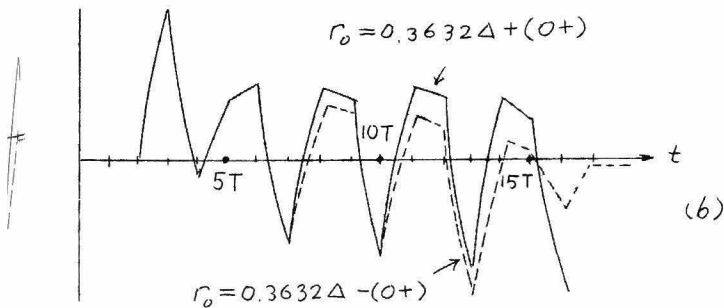


図 5.5 図 5.4 の系において見られる乱調



現象

図 5.5 は初期目標値入力として大きさ r_0 のインパルスを加えた場合の応答で、やはり $r_0 = 0.3632 \Delta$ を境にして丁の3倍周期の乱調を呈する。この場合の平衡点もやはり不安定である。

5.2.3 実際例 その3

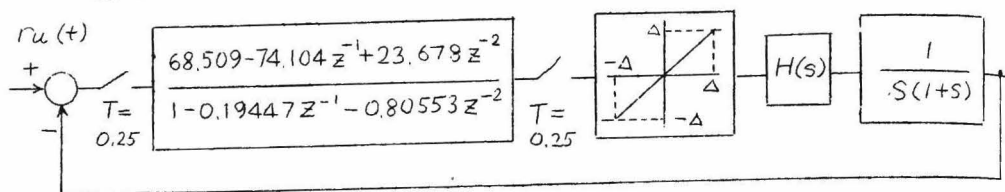


図5.6 周期約 $11T$ の周期的不安定平衡状態を有する系

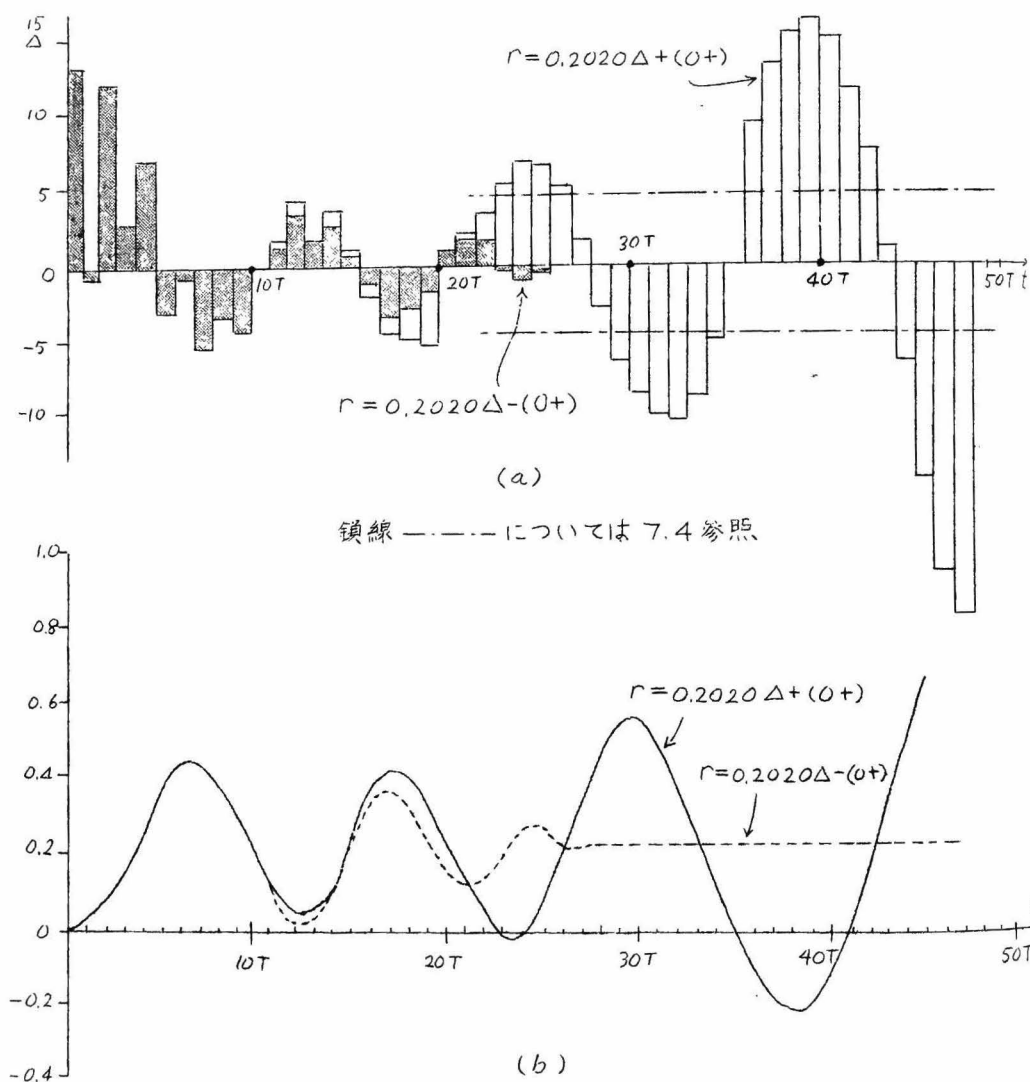


図5.7 図5.6の系に見られる乱調現象

図 5.7 は初期目標値入力として大きさ r のステップ状入力を加えた場合の応答で、やはり $r = 0.2020\Delta$ を境にしてサンプリング周期の 11 倍程度の周期のゆるやかな乱調を呈する。この場合の平衡点もやはり不安定で実際にそれを持続させることはできない。

5.3 乱調現象の有無の判定 および特定初期入力に対する乱調発生条件

上に説明した如く、上記実際例に示した有限整定時間応答系は目標値に対し有限整定するのみならず、外乱および有限回数の制御装置出力の飽和に対しては再び有限整定時間応答の特質を回復し、これら外乱や飽和による制御量の目標値からのずれを有限サンプリング回数後に全く消滅せしめうる優れた性質を有する。しかしながら、図 5.3, 5.5 および 5.7 に示すように制御装置出力が飽和域から完全に脱し切れない場合、入力の大きさに応じてその発生、非発生のきまる乱調現象を呈する。これは、ここにおいて取り上げられた実際例の場合においては、用いられたサンプル値制御装置 $D_F^*(z)$ がいずれも不安定な極すなわち分母の z に関する有限次多項式が $|z| > 1$ なる根を有することが原因となっているものと考えられる。飽和現象が存在しない場合には、これら実際例に示した系は閉ループ全体としての伝達関数 $HG^*(z) \cdot D_F^*(z) / [1 + HG^*(z) \cdot D_F^*(z)]$ は不安定極を含まず、安定な動作をする。飽和の影響により、系の応答が $HG^*(z) D_F^*(z)$ で表わされる完全飽和の状態に近づくとき系が不安定になることが考えられる。ただしこの場合発生する乱調の周波数は、必ずしも $D_F^*(z)$ の有する不安定極の周波数には関係せず、第 1 の例の場合のように振巾が増大しても周波数の変らない場合や第 3 の例のように振巾増大と共に周波数の低下する場合などが存在する。この周波数の変化については、7.4 において説明する。

このような飽和による乱調現象を防止するためには、系の信号が飽和を起こさないよう、制御装置として出力線形範囲の充分大きなものを用

うればよいが、例えば大きさ1のステップ又はインパルス状入力に対し飽和を起さないうにするには制御装置には $\pm 1/(1-e^{-T})$ 以上の線形動作域がなければならず 整定時間を短縮するため、サンプリング周期 T を短かくえらべば非常に大きな値となり、経済上の理由等により実用にならない場合が多い。これに対し、若し乱調を起さないう程度の飽和を許すものとすれば制御装置に要求される線形動作域が小さくて済み、しかも本設計法による場合には有限整定時間応答系としての特質も失なわれない。

以下、一般プロセス系の最も簡単な近似形である $e^{-T_L s}/(1+s)$ なる伝達要素につき、乱調発生限界における制御装置の飽和値 Δ を誘導する。なお解析を簡単にするため、サンプリング周期 T を $nT = T_L$ ($n=0, 1, 2, \dots$) を満足するようえらんだ場合につき考え、目標値入力は単位ステップとする。また前記 E I Jury, W. Schroeder による外乱を考り、よい設計法においては、一ニの例について検討した限りではこのような現象は見られない。その検討例を $1/s(1+s)$ なるサーボ系について行なったものを示す。

5.3 1 むだ時間 $T_L = nT$ ($n=1, 2, \dots$) を有する1次おくれ系 $G(s) = Ke^{-sT_L}/(1+T_0s)$ に対し、目標値(ステップ)、外乱(ステップ)両入力の場合においても目標値に対し、有限整定時間応答するよう制御装置を設計したとき

以下の解析においてもやはり 4.2 におけるように、制御対象時定数 T_0 、制御対象のゲイン定数 K をそれぞれ信号の基準単位として諸量を無次元化し、図 5.8 に示すブロック図で表わされる系につき考える。

上記要求を満足する制御装置 $D_F^*(z)$ の開ループ形 $D^*(z)$ は次のように表わされる*。

* 附録7参照

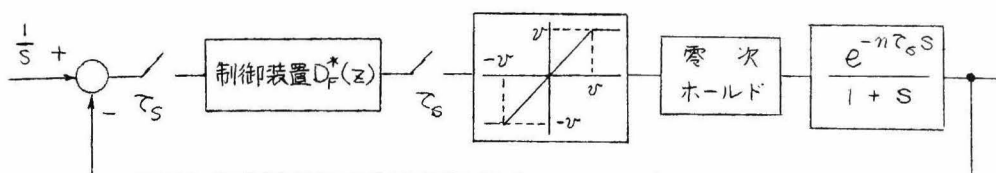


図 5.8 制御装置出力に飽和を有する有限整定時間応答系(プロセス系)

$$D(z) = D_F^*(z) / [1 + HG^*(z) D_F^*(z)] = d(1 - az^{-1})(b_1 - b_2 z^{-1}) \quad (5.1)$$

なお(制御対象+零次ホールド)のZ変換 $HG^*(z)$ は

$$HG^*(z) = z^{-(n+1)} / d(1 - az^{-1}) \quad (5.2)$$

ここに、

$$d = 1/(1-a), \quad a = e^{-\hat{\tau}_s}, \quad b_1 = d(1-a^{n+2}), \quad b_2 = da(1-a^{n+1}) \quad (5.3)$$

図 5.8 より制御装置出力 $F^*(z)$ は

$$F^*(z) = D^*(z) U^*(z) - HG^*(z) D(z) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \quad (5.4)$$

ただし、 $U^*(z)$ は単位ステップ状入力のZ変換で

$$U^*(z) = 1/(1-z^{-1})$$

で表わされる。式(5.4)に式(5.1), (5.2) および(5.5) の関係を用いることにより $F^*(z)$ はつぎのように表わされる。

$$F^*(z) = d(1-az^{-1})(b_1-b_2z^{-1})/(1-z^{-1}) - z^{-(n+1)}(b_1-b_2z^{-1}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \quad (5.6)$$

いま、ここで $\tau = [i(n+1) + j - 1]\tau_s$ ($i = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, n$) における制御装置出力 $f_{i(n+1)+j}$ および飽和量 $\zeta_{i(n+1)+j}$ を各々

$$f_{i(n+1)+j} \equiv f_{(i,j)}, \quad \zeta_{i(n+1)+j} \equiv \zeta_{(i,j)} \quad (5.7)$$

と記するものとする。各サンプリング時点における制御装置出力は表 5.1 のようになる。表 5.1 における第 1 列、すなわち $f_{(i,1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots; \tau = 0, (n+1)\tau_s, 2(n+1)\tau_s, \dots$ における出力) に注目する。これらの項の飽和は式(5.3)の諸関係より、

$$db_i > 0, \quad b_i > 0, \quad \therefore f_{(i,1)} \geq 1, \quad \therefore \zeta_{(i,1)} \leq 0 \quad (5.8)$$

が成立するから飽和特性の正領域で発生する。

いま、 $i \leq n$ に対する $f_{(i,1)}$ がすべて飽和しているものと仮定すると、

$$f_{(i,1)} > v, \quad \therefore \zeta_{(i,1)} = v - f_{(i,1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

であるから、

$$f_{(\overline{i-1},1)} = 1 - b_i \zeta_{(\overline{i-2},1)} = 1 - b_i [v - f_{(\overline{i-2},1)}] = 1 - b_i v + b_i f_{(\overline{i-2},1)}$$

$$f_{(i,1)} = 1 - b_i v + b_i f_{(\overline{i-1},1)} \quad (5.10)$$

$$\therefore f_{(\overline{i-1},1)} - f_{(i,1)} = b_i [f_{(\overline{i-2},1)} - f_{(\overline{i-1},1)}] \quad (5.11)$$

上の関係は $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対し成立するから結局

$$f_{(\overline{i-1},1)} - f_{(i,1)} = b^{i-1} [db_i - 1 + b_i(v - db_i)] \quad (5.12)$$

と表わされることになる。したがって若し、飽和値 v が、

$$v < d(b_i - 1) + \frac{1}{b_i} \equiv \gamma \quad (5.13)$$

を満足する場合には $f_{(i,1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) の間に、

$$f_{(n,1)} > f_{(\overline{n-1},1)} > \dots > f_{(1,1)} > f_{(0,1)} \equiv f_i = db_i > 1 \quad (5.14)$$

なる不等式が成立し、 $f_{(i,1)}$ は i の値と共に漸増する。ただし、 $f_{(i,1)}$ ($i \leq n$) がすべて飽和すると言う上述の仮定が成立するためには、式(5.14)の不等式の最小項 $f_{(0,1)} \equiv f_i = db_i$ が γ より大でなければならぬが、

$$db_i - \gamma \equiv db_i - db_i + d - \frac{1}{b_i} = (db_i - 1) / b_i \quad (5.15)$$

および式(5.3)で与えられる関係に着目すると、

$$db_i > \gamma \quad (5.16)$$

が常に成立する。故に式(5.13) $v < \gamma$ が成立する場合には $f_{(i,1)}$

$i \backslash j$	1	2	3	4			n	$n+1$
0	db_1	$1-dab_2$	1	1			1	1
1	$1-b_1\zeta_{(0,1)}$	$1-b_1\zeta_{(0,2)}+b_2\zeta_{(0,1)}$	$1+b_2\zeta_{(0,2)}$	1			1	1
2	$1-b_1\zeta_{(1,1)}$	$1-b_1\zeta_{(1,2)}+b_2\zeta_{(1,1)}$	$1-b_1\zeta_{(1,3)}+b_2\zeta_{(1,2)}$	$1+b_2\zeta_{(1,3)}$			1	1
3	$1-b_1\zeta_{(2,1)}$	$1-b_1\zeta_{(2,2)}+b_2\zeta_{(2,1)}$	$1-b_1\zeta_{(2,3)}+b_2\zeta_{(2,2)}$	$1-b_1\zeta_{(2,4)}+b_2\zeta_{(2,3)}$			1	1
							$1+b_2\zeta_{(\overline{n-3}, \overline{n-1})}$	1
$n-1$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-2}, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-2}, 2)}+b_2\zeta_{(\overline{n-2}, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-2}, 3)}+b_2\zeta_{(\overline{n-2}, 2)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-2}, 4)}+b_2\zeta_{(\overline{n-2}, 3)}$			$1-b_1\zeta_{(\overline{n-2}, n)}+b_2\zeta_{(\overline{n-2}, n-1)}$	$1+b_2\zeta_{(\overline{n-2}, n)}$
n	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, 2)}+b_2\zeta_{(\overline{n-1}, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, 3)}+b_2\zeta_{(\overline{n-1}, 2)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, 4)}+b_2\zeta_{(\overline{n-1}, 3)}$			$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, n)}+b_2\zeta_{(\overline{n-1}, n-1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n-1}, n+1)}+b_2\zeta_{(\overline{n-1}, n)}$
$n+1$	$1-b_1\zeta_{(n, 1)}+b_2\zeta_{(n-1, \overline{n+1})}$	$1-b_1\zeta_{(n, 2)}+b_2\zeta_{(n, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(n, 3)}+b_2\zeta_{(n, 2)}$	$1-b_1\zeta_{(n, 4)}+b_2\zeta_{(n, 3)}$			$1-b_1\zeta_{(n, n)}+b_2\zeta_{(n, \overline{n+1})}$	$1-b_1\zeta_{(n, \overline{n+1})}+b_2\zeta_{(n, n)}$
$n+2$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, 1)}+b_2\zeta_{(n, \overline{n+1})}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, 2)}+b_2\zeta_{(\overline{n+1}, 1)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, 3)}+b_2\zeta_{(\overline{n+1}, 2)}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, 4)}+b_2\zeta_{(\overline{n+1}, 3)}$			$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, n)}+b_2\zeta_{(\overline{n+1}, \overline{n+1})}$	$1-b_1\zeta_{(\overline{n+1}, \overline{n+1})}+b_2\zeta_{(\overline{n+1}, n)}$

表 5.1 $\mathcal{C} = i(n+1) + j - 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, n+1$) における制御装置出力

($i \leq n$) は正の値で発散, $v > \mu$ なる場合には減少する。

つぎに、 $v > \mu$ なる場合 (式 (5.13) が成立せず、 $f_{(i,1)}$ の値は漸次大きさを減ずる場合)、表 5.1 における $j=1$ 以外の項に対応する制御装置出力はどのように変化するかを考える。第 2 列 $f_{(i,2)}$ に着目すれば第 1 項 $f_{(0,2)} \equiv f_2$ ($\tau=2$ で s における制御装置出力) が飽和するためには、

$$f_{(0,2)} = 1 - dab_2 < -v \quad (5.17)^*$$

でなければならない。ところが、

$$dab_2 - 1 - \mu = [db_1(b_1 - 1)(a - 1) - b_1] / b_1 < 0 \quad (5.18)$$

であるから $v > \mu$ なるときには $f_{(0,2)}$ は飽和を超さない。故に

$$\begin{aligned} \zeta_{(0,2)} &= 0, \\ f_{(1,2)} &= 1 - b_1 \zeta_{(0,2)} + b_2 \zeta_{(0,1)} = 1 + b_2 \zeta_{(0,1)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

第 2 列第 2 項 $f_{(1,2)} = 1 + b_2 \zeta_{(0,1)}$ ($\tau = (n+2)$ で s における制御装置出力) が飽和するためには、 $\zeta_{(0,1)} < 0$, $b_2 > 0$ なることに注意すると、

$$f_{(1,2)} = 1 + b_2 \zeta_{(0,1)} = 1 + b_2(v - f_{(0,1)}) < -v$$

$$\text{ie } v < [db_1(b_1 - 1) - 1] / b_1 \quad (5.20)$$

が成立する必要がある。ところが

$$[db_1(b_1 - 1) - 1] / b_1 - \mu < 0 \quad (5.21)$$

であるから、 $v > \mu$ の場合には明らかに $f_{(1,2)}$ も飽和を超さない。故に、

$$\begin{aligned} \zeta_{(1,2)} &= 0 \\ f_{(2,2)} &= 1 - b_1 \zeta_{(1,2)} + b_2 \zeta_{(1,1)} = 1 + b_2 \zeta_{(1,1)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

以下同様にして、 $v > \mu$ なる場合、表 5.1 第 2 列 $f_{(i,2)}$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} f_{(0,2)} &= 1 - dab_2, \quad f_{(\overline{i+1},2)} = 1, \quad \zeta_{(i,2)} = 0 \\ (i &= 0, 1, \dots, n+1) \end{aligned} \quad (5.23)$$

* 式 (5.8) より $b_2 > 0$, $\therefore f_{(0,2)} < 1$, 故に $f_{(0,2)}$ の飽和は起るとすれば負領域で起らなければならない。 $\therefore \zeta_{(0,2)} = -v - f_{(0,2)} \geq 0$

式(5.23) および表 5.1 より他の列に対応する制御装置出力に関しては

$$f_{(i,3)} = 1, \quad \zeta_{(i,3)} = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n+2) \quad (5.24)$$

$$f_{(i,4)} = 1, \quad \zeta_{(i,4)} = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n+3) \quad (5.25)$$

$$f_{(i,n+1)} = 1, \quad \zeta_{(i,n+1)} = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, 2n) \quad (5.26)$$

式(5.26)の関係を表 5.1 の第 1 列 $f_{(i,1)}$ の $n+1 \leq i \leq 2(n+1)$ の諸項に用うることにより、 $f_{(i,1)}$ は $i \leq n$ の場合と同じく、

$$f_{(i,1)} = 1 - b, \quad \zeta_{(i-1,1)} \quad (n+1 \leq i \leq 2(n+1)) \quad (5.27)$$

と表わされ、収斂をつづける。したがって以下、式(5.23)~式(5.27)の過程が繰返し適用でき、結局 $\psi > \psi^*$ なる場合には系は安定で飽和を生じてもやがて線形動作に移り、目標値に有限整定する。

つぎに $\psi < \psi^*$ 、すなわち $i \leq n$ に対応する表 5.1 第 1 列 $f_{(i,1)}$ がすべて正領域で飽和を起し、かつその大きさが漸増する場合、表 5.1 の他の列に対応する制御装置出力 $f_{(i,j)}$ および $i \geq n+1$ に対応する各出力はどのように変化するかを検討する。

表 5.1 における偶数列出力 $f_{(i,2p)}$ ($p=1, 2, \dots$) は負方向に $i=n+2p-1$ に到るまで、奇数列出力 $f_{(i,2q+1)}$ ($q=1, 2, \dots$) は正方向に $i=n+2q$ に到るまで i の増加と共に発散をつづける。

いま n が奇数の場合を考えると、 $f_{(i,n+1)}$ (偶数列) は $i=2n$ に到るまで i の増加と共に負方向に絶対値を増してゆく。故に $\zeta_{(i,n+1)} \geq 0$ かつ $f_{(i,n+1)}$ が負の飽和値 ψ^* を超過して $\zeta_{(i,n+1)} > 0$ となった後は、その値は i と共に増大する。したがって、表 5.1 第 1 列 $f_{(i,1)}$ の正方向増加の傾向は $n+1 \leq i \leq 2n$ に対しても継続する。以上の関係を繰返し用うることにより、 n が奇数の場合には図 5.9 に示すように表 5.1 奇数列 $j=1, 3, \dots, n$ に対応する制御装置出力は正方向に、偶数列 $j=2, 4, \dots, n+1$ に対応する出力は負方向に発散してしまうことがわかる。

一方、 n が偶数の場合には同様な考察により、表 5.1 奇数列 $f_{(i,2q+1)}$

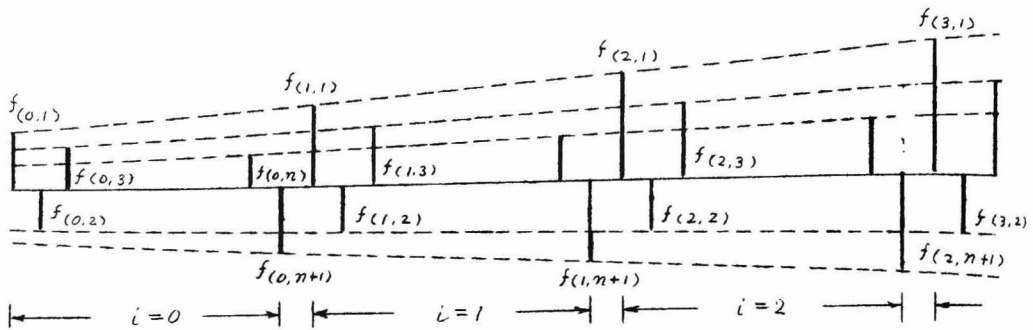


図 5.9 n が奇数の場合における発散現象 (制御装置出力)

については $i \geq n+2q+1$, 偶数列 $f_{(i,2p)}$ については $i \geq n+2p$ に対する出力が b_1 のかゝった項と b_2 のかゝった項との相殺の効果により、発散の傾向を押えられ、逆に収束する可能性が考えられる。このように n が偶数の場合には、式 (5.13) で与えられる系が乱調を起こさないために要求される制御装置線形動作域に対する条件は緩和される可能性を有する。図 5.10 は n が偶数の場合における制御装置出力の模様を示したもので、図示のように正方向増加、負方向増加の入れ換りが $f_{(i,n+1)}$ と $f_{(i+1,1)}$ のところでくずれ、正方向増加が並ぶことになる。

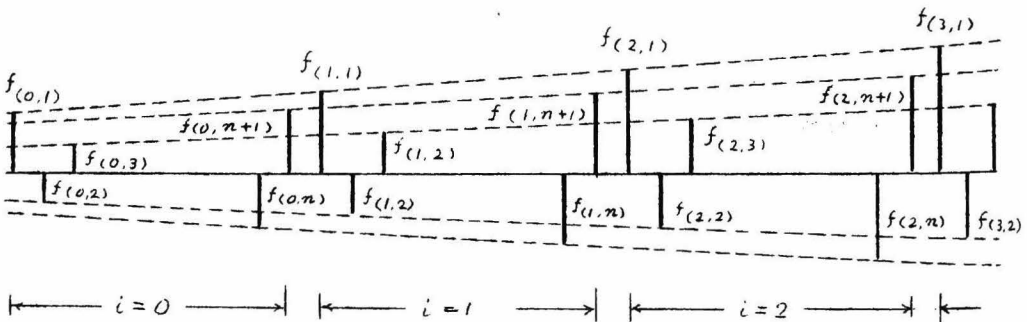


図 5.10 n が偶数の場合における発散現象 (制御装置出力)

以上の検討の結果、制御装置の出力線形動作域と乱調現象の有無との間につぎの結論が導びかれる。すなわち単位ステップ状入力に対して

$f_{(n)}$ は、

「 n が奇数である場合、 $v > \mu$ は系が乱調を起さず有限整定時間応答するための必要十分条件である。これに対し、 n が偶数の場合には、 $v > \mu$ は系が乱調を起さず有限整定時間応答するための十分条件である。」

図 5.11, 5.12, および 5.13 は $n = 1, 2, 3$ すなわち、サンプリング周期を1次おくれ系の有するむだ時間の1倍、1/2倍および1/3倍にえらび、単位ステップ状目標値入力を加えた際、制御装置出力が飽和を起す場合における乱調現象の有無を式(5.6)を用いて数値計算したもので、いずれも $v > \mu$ なる場合、安定な有限整定動作、 $v = \mu$ なる場合には、各々サンプリング周期の2倍、3倍および4倍を周期とする持続振動、 $v < \mu$ の場合には各振動が無限に発散することを示している。

22

5.3.2 $n=0$, すなわち、むだ時間のない1次おくれ系 $G(s) = K/(1+T_0s)$ に対し、目標値(ステップ)、外乱(ステップ)両入力の場合においても目標値に対し、有限整定時間応答するよう制御装置を設計したとき

$n=0$ の場合にはさきに求めた安定限界の不等式(5.13)を使用することはできない。それは表 5.1 の第1列、すなわち $f_{(i,1)}$ ($i=0, 1, 2, \dots$) のように制御装置出力がただ1個の飽和量 $G_{(i-1,1)}$ によって決定される一群がなくなるからである。したがって、この場合に対しては別途考察を必要とする。

前の場合と同じく時間、および信号を制御対象時定数 T_0 およびゲイン定数 K により無次元化することにより 各サンプリング時点における制御装置出力はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau=0 & \quad f_1 = db_1 \\ \tau=\tau_s & \quad f_2 = 1 - dab_2 - b_1 G_1 \\ \tau=(i-1)\tau_s & \quad f_i = 1 - b_1 G_{i-1} + b_2 G_{i-2}, \quad i=3, 4, \dots \end{aligned} \right\} (5.28)$$

ここに d, b_1, b_2 は式(5.3)において $n=0$ とおくことにより、

$$d = 1/(1-a), \quad b_1 = 1+a, \quad b_2 = a, \quad a = e^{-\tau_s} \quad (5.29)$$

式(5.28)に示した f_1, f_2, f_3 以下の飽和、非飽和の条件を考察すれば結論として表5.2に示すような結果が得られ、継続して飽和が起るのは f_1, f_2 および f_3 以下がいずれも正領域飽和の場合しかあり得ない。かつ、この場合においても飽和量は徐々に減少し、遂に線形動作に移ることになる。以下表5.2に示した結論を簡単に説明する。

f_1	f_2	f_3 以下
非 飽 和	→	以下線形領域動作(安定)
正領域飽和	→	負領域飽和(存在せず)
	→	正領域飽和 → 正領域飽和
	→	非 飽 和 → 以下線形動作(安定)

表5.2 図5.8の系において、むだ時間が存在しない場合の飽和現象

(1) f_1 が非飽和の場合

この場合、 $G_1 = 0$ であるから式(5.28)より、

$$f_2 = 1 - dab_2 \quad (5.30)$$

ところが式(5.29)の関係より、 $f_2 < 1$ であることは明らかである。故に f_1 の飽和は負の飽和域でしか起こり得ない。 f_2 が負の領域で飽和するためには、 $1 - dab_2 < -v$ すなわち、

$$v < (a + a^2 - 1)/(1 - a) \quad (5.31)$$

でなければならない。ところが、

$$(a + a^2 - 1)/(1 - a) - f_1 = (a^2 - 2)/(1 - a) < 0 \quad (5.32)$$

であるから、式(5.31)の条件は f_1 が飽和しないとの条件、 $v > f_1$ に反する。故に f_1 が非飽和ならば f_2 も飽和せず、以下式(5.28)よりわかるように系は線形領域で動作し、安定である。

(2) f_1 が正領域飽和、 f_2 が負領域飽和

式(5.29)の関係より $f_1 > 1$ 、したがって f_1 の飽和は正の飽和に

単位ステップ信号が制御系に加えられた場合における制御装置出力（ホールド値）

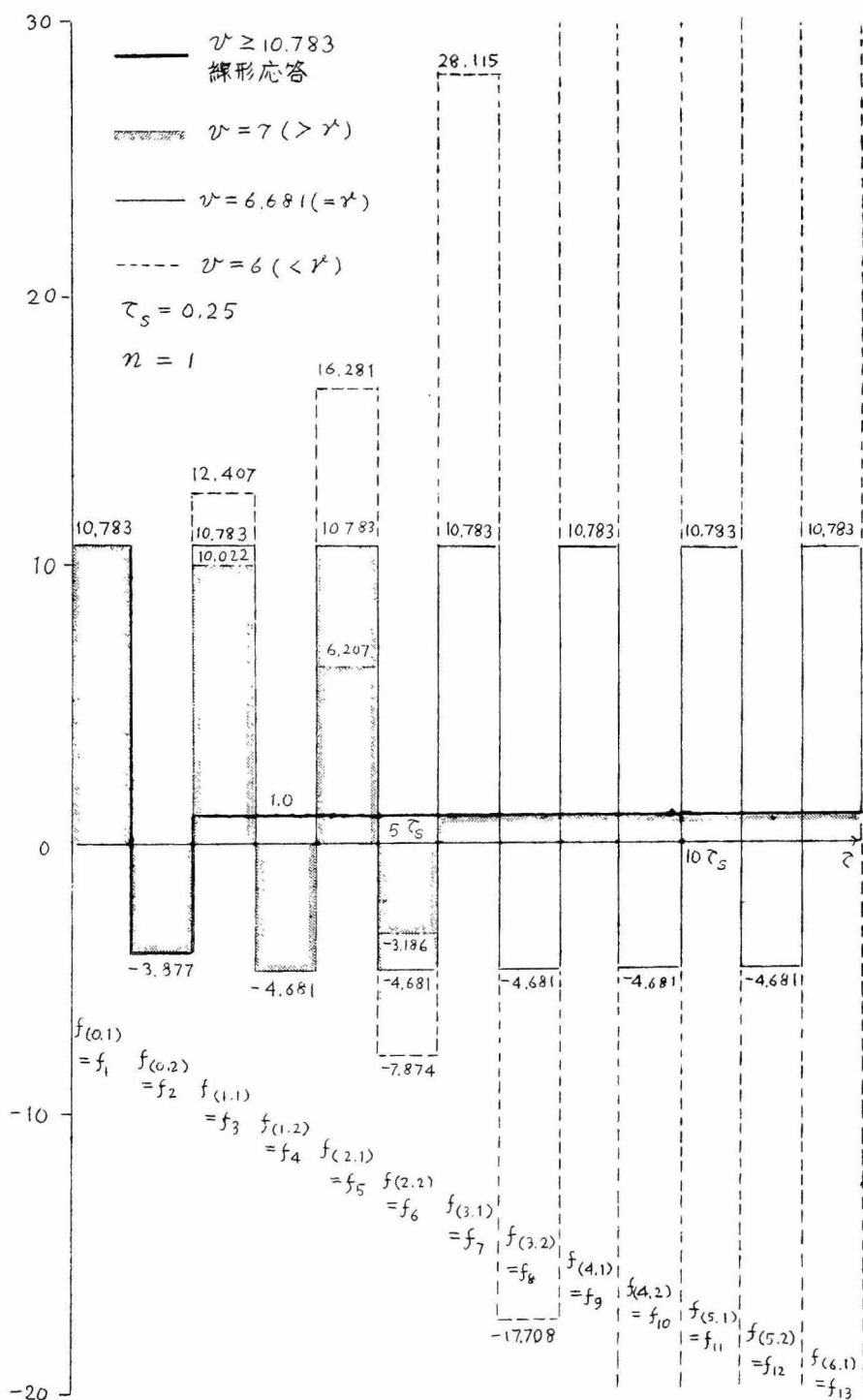


図 5.11 図 5.8 の系において、 $n=1$ の場合に対するインデシャル応答（制御装置出力ホールド値）

単位ステップ信号が制御系に加えられた場合における制御装置出力（ホールド値）

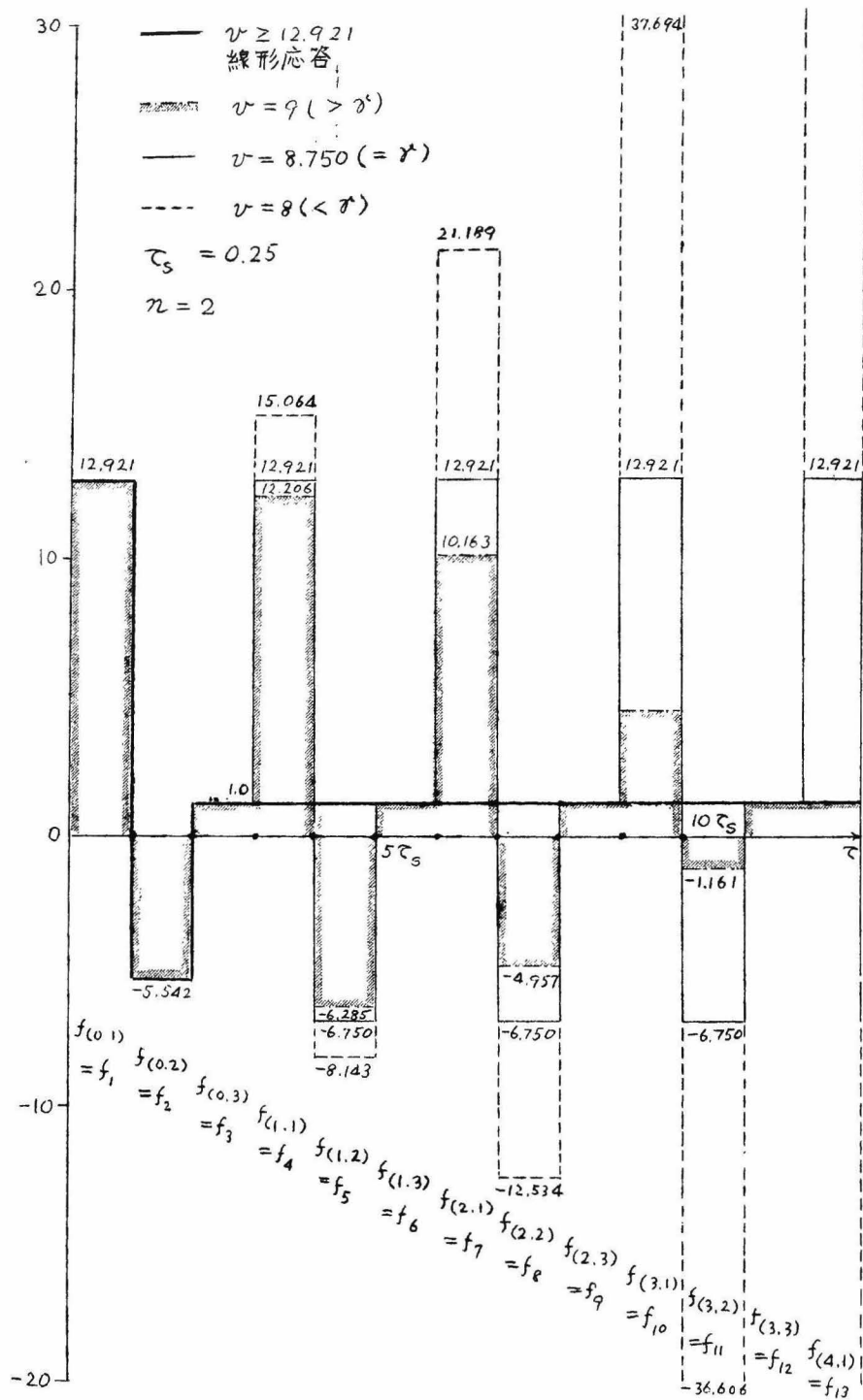


図5 12 図5.8の系において、 $n=2$ の場合に対するインデシャル応答（制御装置出力ホールド値）

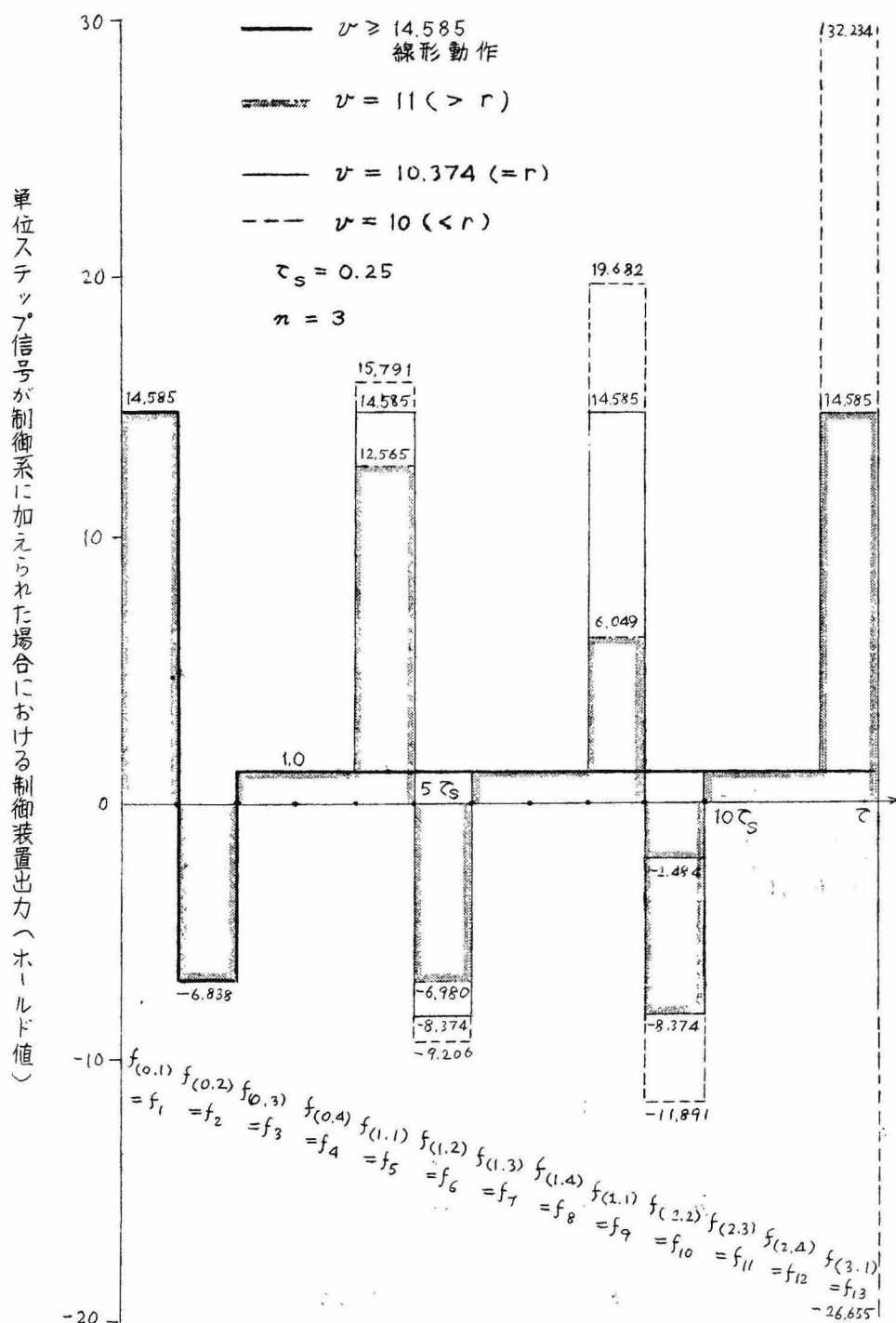


図 5.13 図 5.8 の系において、 $n=3$ の場合に対するインテニシャル応答（制御装置出力ホールド値）

限られ、その場合の飽和量 ζ_1 は

$$\zeta_1 = v - f_1 < 0 \quad (5.33)$$

ついで f_2 が負の飽和域で飽和を生ずるためには式 (5.28), (5.33) より $f_2 = 1 - dab_2 - b_1 \zeta_1 = 1 - dab_2 + db_1^2 - b_1 v < -v$, すなわち,

$$v > (1 - dab_2 + db_1^2)/a \quad (5.34)$$

でなければならない。ところが $(1 - dab_2 + db_1^2)/a - f_1 = (2-a^2)/a(1-a) > 0$ であるから、 f_1 が飽和するという条件 $v < f_1$ に反する。したがって、このような場合は存在しない。

(3) f_1, f_2 共 正領域で飽和する場合.

この場合 $\zeta_1 < 0$ であるから、 f_2 が正の飽和域で飽和を起すとすれば $f_2 = 1 - dab_2 + db_1^2 - b_1 v > v$, すなわち,

$$v < (1 - dab_2 + db_1^2)/(1 + b_1) = 1/(1-a) (\equiv v_2) \quad (5.35)$$

でなければならない。ところが $f_1 = db_1 (\equiv v_1) > v_2$ であるから式 (5.35) $v < v_2$ は f_1, f_2 共正の領域で飽和を起すための条件である。

(4) f_1 が正の領域で飽和、 f_2 が飽和しない場合

上の説明で明らかなように v が

$$v_2 < v < v_1 \quad (5.36)$$

のときには f_1 は正の領域で飽和、 f_2 は非飽和 ($\zeta_2 = 0$) となる。したがって f_3 は,

$$f_3 = 1 - b_1 \zeta_2 + b_2 \zeta_1 = 1 + b_2 \zeta_1 = 1 + b_2 (v - f_1) \quad (5.37)$$

と表わされ、 f_3 が負の領域で飽和するためには、

$$v < (1 - 2a - a^2)/(1 - a^2) \leq 1 \quad (5.38)$$

すなわち $v \leq 1$ となり、制御対象 $G(s) = 1/(1+s)$ なる形より明らかなように、操作入力を 1 以下に制限することは明らかに不合理である。また f_2 が正領域で飽和するものとするれば、

$$v < (1 - 2a - a^2)/(1 - a^2) \leq 1 \quad (5.39)$$

となり やはりこの場合に対する制御装置の線形動作域としては不合理である。したがって、 f_2 が正の領域で飽和しなければ f_3 も飽和せず式 (5.28) より以後飽和は起らず系は安定である。

(5) f_1, f_2, f_3, \dots が正の領域で飽和を起す場合

以上の説明より明らかなように (3) に示した f_1, f_2 共正飽和を起す場合を除いてはすべて系は安定である。 f_1, f_2 が正の領域で飽和を起す場合、それ以後に現れる各制御装置出力 f_3, f_4, \dots は式 (5.28) の関係より飽和を生ずるとすればすべて正領域となることは明らかである。いま f_1, f_2, \dots, f_{p-1} がすべて正の領域で飽和するものと仮定すると、 f_p はつぎのように表わされる。

$$f_p = d - d(v-1)(p-1) + d^2 [b_2(1-b_2) + v b_2^2 (1-b_2^{\overline{p-1}})] \quad (5.40)$$

この式は p と共に単調に減少することを示している。 f_p もまた正の領域で飽和を起すための条件は、

$$v < [d + d(p-1) + d^2 b_2(1-b_2)] / [1 + d(p-1) - d^2 b_2^2 (1-b_2^{\overline{p-1}})] \quad (\equiv v_p) \quad (5.41)$$

つぎに f_{p+1} が負の領域で飽和するための条件を求めれば、

$$v > [d + dp + d^2 b_2(1-b_2)] / [-1 + dp - d^2 b_2^2 (1-b_2^{\overline{p}})] \quad (\equiv v_{p+1}) \quad (5.42)$$

ところが式 (5.41) - 式 (5.42) を計算することにより $v_{p+1} > v_p$ となり、 f_{p+1} が負領域で飽和するものと仮定すると、 $v < v_p$ なる式 (5.41) の仮定に反する。すなわち f_{p+1} は f_i ($i = 1, 2, \dots, p$) が正の領域で飽和を生じたとき負の領域で飽和することはあり得ず、制御装置出力 f_i は

$$d - d(v-1)p + d^2 [b_2(1-b_2) + v b_2^2 (1-b_2^{\overline{p}})] \leq v$$

を満足する整数回 p のサンプリングの後、線形動作に移る。

いま f_p が初めて飽和を離れたと仮定すると、その場合 f_{p+1} はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} f_{p+1} &= 1 + b_2 \zeta_{p-1} = 1 + b_2(v - f_{p-1}) \\ &= d^2 \{ (1-b_2)(1-b_2-b_2^2 + b_2^{\overline{p-1}}) + v[-b_2^2(1-b_2^{\overline{p-1}}) + b_2(1-b_2)(p-1)] \} \end{aligned} \quad (5.43)$$

ところが $\zeta_{p-1} < 0$ ($\because f_{p-1}$ は正の領域で飽和しているものと仮定) であるから $f_{p+1} < 1$ 、したがって f_{p+1} の飽和は起るとしても負の領

域でしか起り得ない。 f_{p+1} が負の領域で飽和するための条件を求めれば、

$$v < [d^2(1-b_2)(1+b_2)+d^2b_2(p-2)] / [-1+b_2+\dots+b_2^p-b_2(p-1)] < 0 \quad (5.44)$$

となり不合理である。したがって f_p が飽和を離れれば f_{p+1} も飽和せず、式(5.28)の関係から以後線形動作に移ることになる。

以上、(1)~(5)の考察を総括することによりつぎの結論をうる。

「 $\tau=0$ すなわち、むだ時間を含まない場合には制御装置線形動作域 $v(\geq 1)$ およびサンプリング周期 T_s ($\neq 0$) の如何にかかわらず安定で、飽和を離れて後有限整定時間応答をする、また飽和時における制御装置出力の過渡変化は非振動的(したがって制御系出力、偏差も共に非振動的)に減少し、線形動作域に入って2サンプリング経過後整定時出力 1.0 になる。」

以上一般プロセス特性の最も簡単な近似として採用されることの多いむだ時間を有する1次おくれの系に、外乱や飽和を考りよした有限整定時間応答用制御装置を用いた場合、飽和の程度によりその発生、非発生 of きまる乱調現象の発生限界を、目標値入力として単位ステップを加えた場合に限って求めたわけである。以下、式(5.13)で与えられる乱調発生条件式より導くことのできる事項につき説明する。

図 5.14 はサンプリング周期 T をプロセスの有するむだ時間の1倍、 $1/2$ 倍、 $1/3$ 倍、 $1/4$ 倍および $1/5$ 倍に選んで制御装置を設計した場合サンプリング周期 T とプロセスの有する1次おくれの時定数 T_0 の比 (ie T_s) により乱調を起こさないために制御装置出力に要求される線形動作域 v_L がどのように変化するかを示したものである。図における横軸上の1点、例えば αT すなわちプロセスの時定数 T_0 に対し、サンプリング周期 T を T_0/α に送んだ場合に注目する。この場合、系の有するむだ時間 T_L がサンプリング周期 T の 1, 2, 3, 4, 5 倍 (ie $\tau = 1, 2, 3, 4, 5$)、換言すれば時定数 T_0 の $1/\alpha, 2/\alpha, \dots, 5/\alpha$ 倍と長くなるにつれて必要な線形動作域 v_L は $v_{L1} < v_{L2} < v_{L3} \dots$ と大き

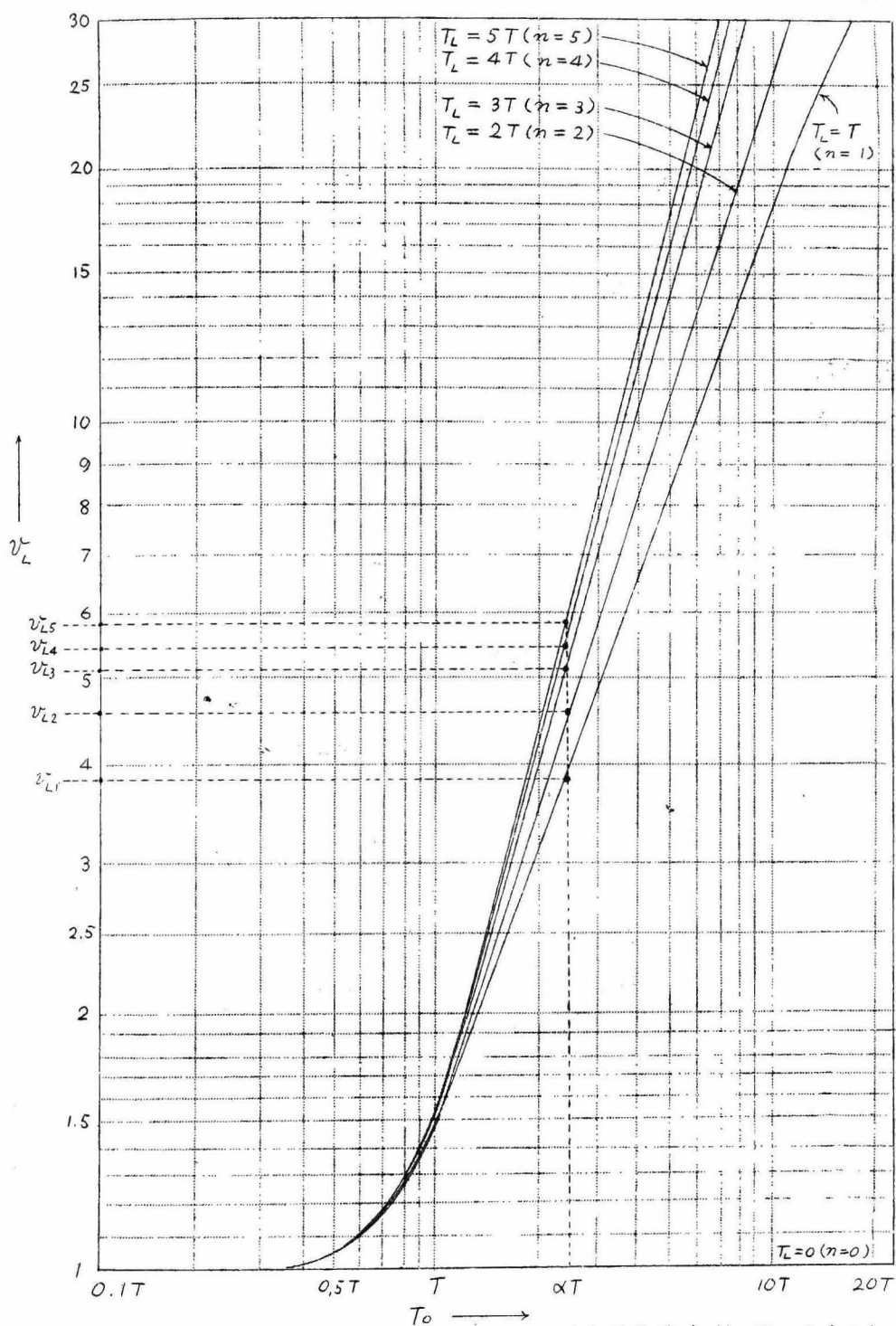


図 5.14 サンプルング周期 T に対する 1 次おくれ要素時定数 T_o のえらび方と安定動作に必要な線形動作域 v_L

くなり、制御装置としては要求が苛酷になる。しかし $T \geq T_0$ を満足するようサンプリング周期 T を選んだ場合には乱調を起さないために必要な ψ の値はむだ時間によってあまり変化しない。すなわち、むだ時間の大きさよりも時定数に対するサンプリング周期の選び方が大切なことがわかる。ただし、むだ時間が存在しないプロセスでは、この種制御装置を用いた場合にも乱調現象は見られない。

図 5.15 は T_L/T_0 ($=$ むだ時間 / 時定数) $= 10, 1$ および 0.1 なる 3 種の制御対象について、サンプリング周期 T と乱調を起さないうために要求される制御装置出力の線形動作域 ψ_L との関係を示したものである。

式 (5.13) の条件は T_L/T ($= T_L/\tau_s$) $= n$ = 整数の場合について求めた乱調現象が発生しないための必要十分条件 (n : 奇数の場合) および十分条件 (n : 偶数の場合) であり、非整数の n , 換言すればむだ時間 T_L がサンプリング周期 T の整数倍になるようえられなかった場合に対しては言及していない。したがって、図における \bullet 印および \circ 印以外の破線で結んだ部分は、 T_L が T の整数倍になるようえらんだ場合の結果から推測により画いたものである。また \circ 印の点 (T_L/T : 偶数) は上に述べたように、乱調を防止するため要求される ψ_L の十分値を与えるものであり、したがってこれらの点は下方に移行して制御装置に必要とされる線形域を小さくする可能性がある。

図 5.15 よりもわかるようにサンプリング周期 T をプロセスの時定数 $T_0 = 1$ と同等程度にえらんだ場合、単位ステップ状入力に対し乱調を起さないために必要な制御装置出力の線形動作域は $\psi_L = \frac{\Delta_L}{K} \doteq 1.5$ となる。ただしこのとき、むだ時間 T_L とサンプリング周期 T との比率 n は $Ke^{-10s}/(1+s)$ なる系においては $n=10$, $Ke^{-s}/(1+s)$ なる系においては $n=1$, $Ke^{-0.1s}/(1+s)$ なる系においては $n < 1$ すなわち $T > T_L$ である。いま式 (5.1), (5.2) を用いて制御装置 $D_F^*(z)$ のパルス伝達関数を求めれば、

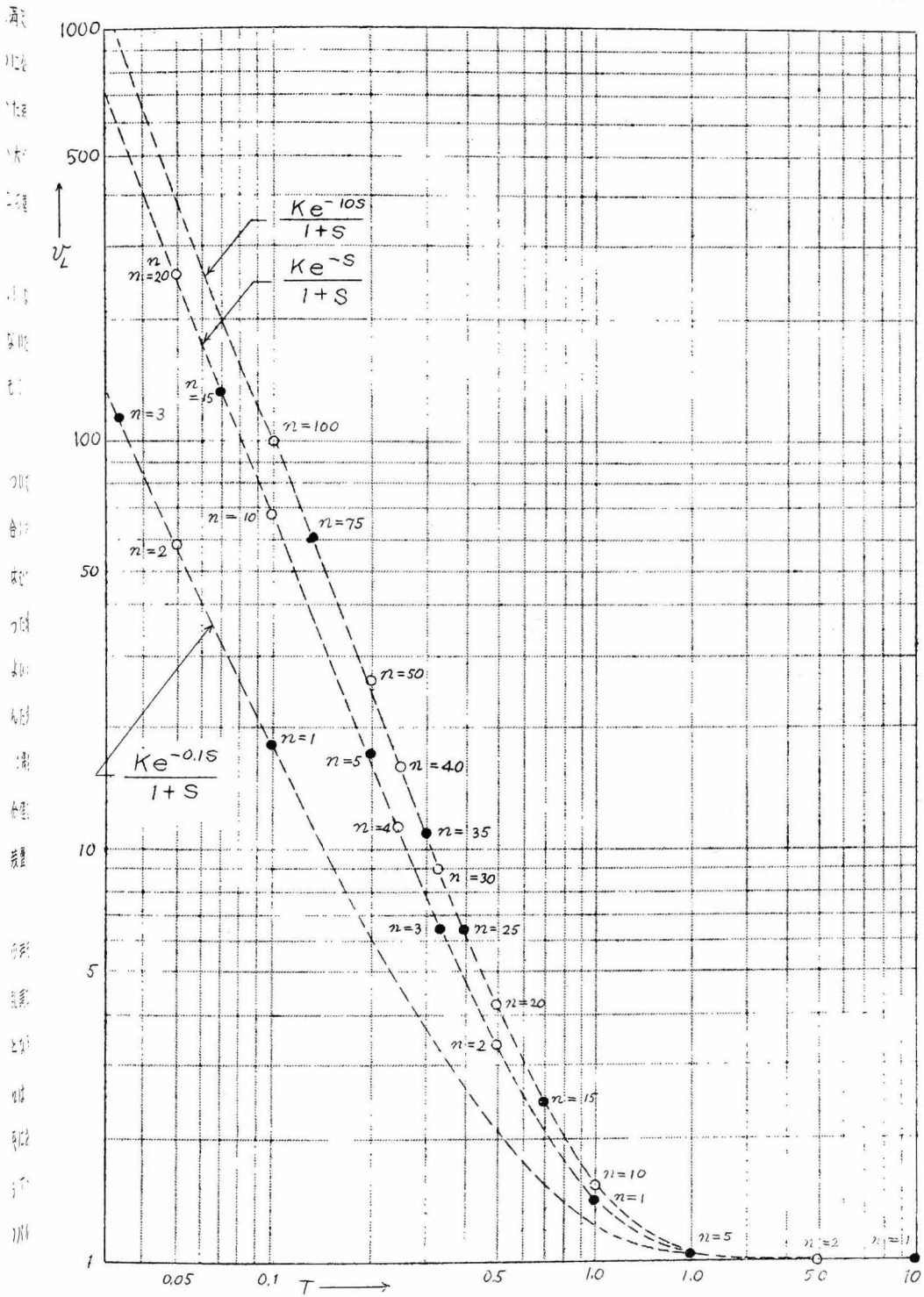


図 5.15 サンプルング周期 T と安定動作に必要な線形動作域 U_L

$$D_F^*(z) = \frac{D^*(z)}{1 - HG^*(z)D^*(z)} = \frac{d(1 - a_1 z^{-1})(b_1 - b_2 z^{-1})}{1 - b_1 z^{-(n+1)} + b_2 z^{-(n+2)}} \quad (5.45)$$

と表わされ、 n が大、すなわちサンプリング周期 T をプロセスの有するむだ時間に比べ小さく選べば選ぶほど、分母の z^{-1} の次数が増加する。 z^{-1} の次数が増すことは制御装置設計製作の立場よりみれば、後に第Ⅲ編において述べるように過去の入力サンプル値や計算出力値を記憶しておくための記憶装置の数が比例して増加することになり、装置を複雑、かつ取扱い難いものにする。

5.3.3 2次のサーボ系 $G(s) = K/s(1 + T_0 s)$ において、

目標値入力（ステップ）に対してのみ有限整定時間

応答するよう制御装置を設計したとき、

前の場合と同じく T_0 および K をそれぞれ時間および信号基準単位にえらび 時間および系の各部の信号、諸量は無次元化した図 5.16 に示す系について考える。

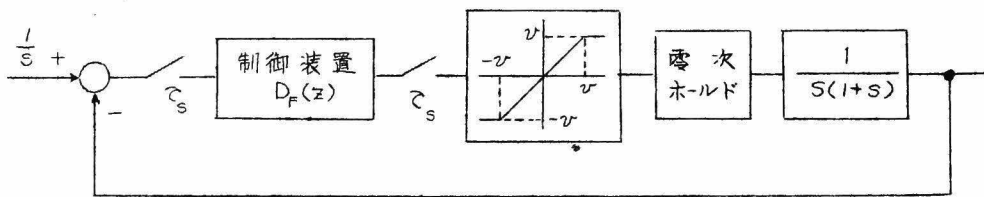


図 5.16 制御装置出力に飽和を有する有限整定時間応答系（サーボ系）

図における（制御対象＋零次ホールド）の z 変換はこの場合

$$HG^*(z) = -(b_1 + b_2 z^{-1}) z^{-1} / d(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \quad (5.46)$$

これに対し、外乱を考りよしない E. I. Jury, W Schroeder の設計法による制御装置の開ループ形は、目標値がステップ状の場合には、

$$D^*(z) = d(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \quad (5.47)^*$$

で与えられる。ここに、

* 式(5.47), (5.48)の導出は附録 8 参照

$$d = 1/\tau_s(1-a), \quad a = e^{-\tau_s}, \quad b_1 = d(1-\tau_s-a), \\ b_2 = d(\tau_s a + a - 1) \quad (5.48)$$

上式から、制御装置出力のZ変換 $F^*(z)$ は、

$$F^*(z) = d[1 - a z^{-1}] + z^{-1}(b_1 + b_2 z^{-1}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \quad (5.49)$$

各サンプリング時点 $\tau = (i-1)\tau_s$ ($i=1, 2, \dots$) における制御装置出力 f_i は

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad f_1 &= d \\ \tau = \tau_s, \quad f_2 &= b_1 \zeta_1 - d a \\ \tau = (i-1)\tau_s, \quad f_i &= b_1 \zeta_{i-1} + b_2 \zeta_{i-1} \quad (i \geq 3) \end{aligned} \quad \text{以上} \quad (5.50)$$

故に f_2 は $-(a+b_1) > 0$ すなわち $(\tau_s - 1)(1 - e^{-\tau_s}) + \tau_s e^{-2\tau_s} > 0$ が満足される τ_s の比較的大きな場合には正飽域で飽和する可能性があり、 $(\tau_s - 1)(1 - e^{-\tau_s}) + \tau_s e^{-2\tau_s} < 0$ が満足される τ_s が小さい場合には負領域での飽和が考えられる。

(1) f_1, f_2 共正の領域で飽和するとき、

式(5.48)より $0 \leq \tau_s \leq \infty$ の τ_s に対し、

$$-1 \leq b_1 \leq -0.5, \quad -0.5 \leq b_2 \leq 0 \quad (5.52)$$

が成立する。また f_1, f_2 共正領域飽和との仮定より、

$$\zeta_1 < 0, \quad \zeta_2 < 0 \quad (5.53)$$

したがって f_i ($i \geq 3$) の飽和は正の領域に限られることになる。

$$\begin{aligned} \therefore f_i &= \left[f_1 + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{1}{1-b_2} \right] - \frac{v}{1-b_2} (i-1) \\ &\quad - \left[f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2} \right] \frac{b_2^{(i-1)}}{1-b_2} \quad i \geq 3 \quad (5.54)^* \end{aligned}$$

上式における第1項は正の定数、第2項は i の増加と共に(サンプリングを重ねると共に)負の方向に増加、第3項は式(5.52)より明らかに正負交替的に絶対値を減少する。したがって f_i は振動的では

* 式(5.54)の導出は附録9参照

あるが、 i の増加と共に振巾が下り、やがて正の線形動作域に入ることになる。いま f_i が線形動作域に入ったとすると、

$$f_i = b_1 \zeta_{i-1} + b_2 \zeta_{i-2} < v \quad \therefore \zeta_i = 0 \quad (5.55)$$

$$f_{i+1} = b_1 \zeta_i + b_2 \zeta_{i-1} = b_2 \zeta_{i-1} > 0 \quad (\because \zeta_{i-1} < 0) \quad (5.56)$$

ところが式(5.52)より明らかなように、 $|b_2| < |b_1|$ であるから、

$$v > f_i > f_{i+1} > 0 \quad (5.57)$$

なる関係が成立し、 f_{i+1} も飽和しないことは明らかである。したがって $\zeta_i = \zeta_{i+1} = 0$ となり、式(5.50)より、以後飽和は起らず安定である。

(2) f_1 が正の領域、 f_2 が負の領域で飽和する場合

この場合、 $\zeta_1 < 0$ 、 $\zeta_2 > 0$ であるから、 $|b_1 \zeta_2| > |b_2 \zeta_1|$ のとき $f_3 < 0$ 、逆の場合 $f_3 > 0$ となり、 f_3 としては正負両飽和に対する吟味を行なう必要がある。

(2-1) f_1 が正の領域で、 f_2, f_3 が共に負の領域で飽和する場合を仮定すれば(1)の場合と同じ理由から $f_i (i \geq 4)$ はすべて負領域での飽和の可能性のみが存在し、

$$f_i = \left[f_1 + \left(f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2} \right) \frac{1}{1-b_2} \right] + \frac{v}{1-b_2} (i-1) - \left[\left(f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2} \right) \frac{b_2^{(i-1)}}{1-b_2} \right] \quad i \geq 4 \quad (5.58)^*$$

が成立する。上式の第3項は式(5.54)の場合と同じく正負交番的に大きさを減ずる振動項であるが、第2項は i の増加と共に正の値を増加する。したがって f_i はやがて負の線形領域に入ることになる。いま f_i が $f_i > -v$ となったとすると、

$$f_i = b_1 \zeta_{i-1} + b_2 \zeta_{i-2} > -v \quad \therefore \zeta_i = 0 \quad (5.59)$$

$$f_{i+1} = b_1 \zeta_i + b_2 \zeta_{i-1} = b_2 \zeta_{i-1} < 0 \quad (\because \zeta_{i-1} > 0) \quad (5.60)$$

さきに述べた通り $|b_2| < |b_1|$ であるから、

$$0 > f_{i+1} > f_i > -\Delta \quad (5.61)$$

* 式(5.58)の導出は附録10参照

が成立し、 f_{i+1} も飽和を起こさず、 $\zeta_{i+1}=0$ となる。故にこの場合も(1)の場合と同様安定である。

(2-2) つぎに f_1, f_3 が正領域、 f_2 が負領域で飽和する場合を仮定する。(1)および(2-1)における考察から、相隣合う2つの制御装置出力が同一極性の飽和領域で飽和する場合にはやがて線形動作に移り安定なることが判明した。したがって残るのは、

$$f_{2(i+1)} \quad (i=0, 1, \dots) \text{ が負領域で飽和} \quad \therefore \zeta_{2i} = -v - f_{2i} > 0$$

$f_{2i+1} \quad (i=1, 2, \dots) \text{ が正領域で飽和} \quad \therefore \zeta_{2i+1} = v - f_{2i+1} < 0$
なる場合だけである。この場合 f_{2i}, f_{2i+1} は各々つぎのように表わされる。

$$f_{2(i+1)} = f_1 - \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{1}{(1 - b_2)} \\ - \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{b_2^{2i-1}}{(1 - b_2)} \quad (5.62)^*$$

$$f_{2i+1} = f_1 + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{1}{(1 - b_2)} - \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{b_2^{2i}}{(1 - b_2)} \quad (5.63)^*$$

ところが、上記両式における $\left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right]$ は

$$f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} < 0$$

なることが容易にわかるから $f_{2(i+1)}, f_{2i+1}$ 共に i の増加にしたがってその絶対値を減じ、どちらかがやがて線形動作域に入る。(1)ま、 f_{2i+1} が正の飽和領域から線形動作域に入ったと仮定すると、

$$f_{2(i+1)} = b_1 \zeta_{2i+1} + b_2 \zeta_{2i} = b_2 \zeta_{2i} < 0 \quad (\because \zeta_{2i} > 0) \quad (5.64)$$

したがって $f_{2(i+1)}$ は飽和するとしても、負領域でのみ起りうる。また

$$f_{2(i+1)+1} = b_1 \zeta_{2(i+1)} + b_2 \zeta_{2i+1} = b_1 \zeta_{2(i+1)} \leq 0 \\ (\because \zeta_{2(i+1)} \geq 0) \quad (5.65)$$

すなわち、 $f_{2(i+1)+1}$ も負の領域でしか飽和を生じえない。したがって、

* 式(5.62), (5.63)の導出は附録11参照

(2-1)により安定である。同様にして $f_{2(i+1)}$ が負の飽和領域から線形動作域に入った場合には $f_{2(i+1)+1}$, $f_{2(i+2)}$ 共正の領域でしか飽和を生じえず、(1)における吟味によりやはり安定なことがわかる。

以上の考察よりつぎの結論をうる。

「この系はサンプリング周期、制御装置の線形動作域の如何を問わず安定で、乱調現象は存在しない。」

第6章 サンプル値系におけるサンプリング周期の整数倍を周期とする非線形振動の解析

6.1 サンプル値系における非線形整数次振動

本節においては一般のサンプル値制御系が非線形要素を含む場合における非線形振動のうち、サンプリング周期の整数倍を周期とする整数次振動を取り上げ考察する。

連続制御系における非線形振動の問題は従来、等価伝達関数法、位相面解析法その他、多くの研究者による独自の立場からの研究が多く発表されて来た。サンプル値系が非線形特性を含む場合には、すでに本章の序文で述べた通りこれら非線形特性の他に、サンプラーによる信号の断続と言う信号の時間

的な不連続性が加味されるため、その取り扱い是非常に厄介になる。このことは非線形振動の周波数がサンプリング周波数に近づいた場合、特に著しい。すなわち、図6・1に示すような“サンプラー”+“零次ホールド”に単一周波数 ω の正弦波

$$x(t) = X e^{j(\omega t + \phi)}$$

が入った場合を考えると、ホールド回路

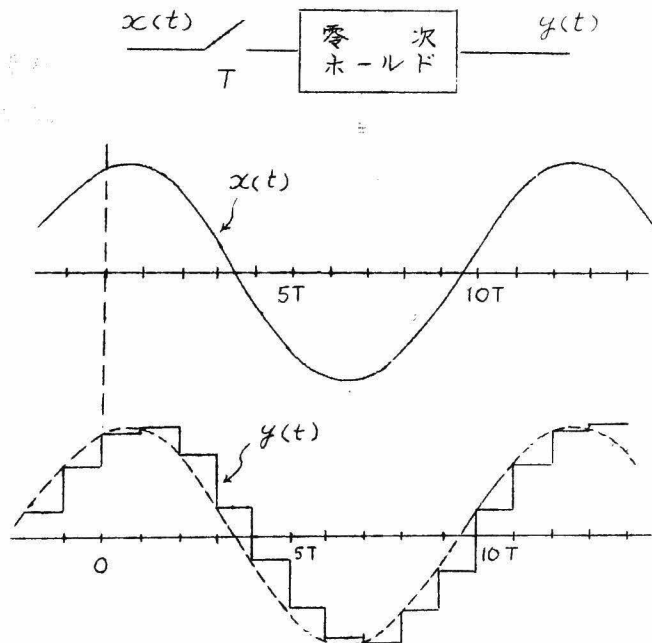


図 6・1 “サンプラー”+“零次ホールド”回路の動作

出力 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ は、

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{X e^{j\varphi}}{1 - e^{-(s-j\omega)T}} \quad (6.1)$$

定常出力は $1 - e^{-(s-j\omega)T} = 0$ の根 $s = j(\omega + m\omega_s)$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\omega_s = 2\pi/T$ に対する函数の和

$$y(t) = X \frac{\omega}{T} e^{j\varphi} H(j\omega) \sum_{m=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \frac{e^{j(\omega + m\omega_s)t}}{\omega + m\omega_s} \quad (6.2)^*$$

と与えられる。いま $m=0$ (基本波 ω 成分) および $m=1$ ($\omega + \omega_s$ 成分) に注目すればそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \omega \text{ 成分} &: \frac{X}{T} H(j\omega) e^{j\varphi} \\ \omega + \omega_s \text{ 成分} &: \frac{X}{T} H(j\omega) \frac{\omega}{\omega + \omega_s} e^{j\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

となり、 $\omega \ll \omega_s$ の場合には ω 成分以外の高周波成分 ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$ に対応) は殆んど無視することゝでき、サンプラーの作用は式 (6.2) よりわかるように、単に信号が $1/T$ 倍されるものと近似することができる。しかるに $\omega \cong \omega_s$ すなわち、振動周波数がサンプリング周波数に近づいた場合には $m \neq 0$ の成分を省略できなくなり、発生する振動も非正弦波的なものとなることが予想される。

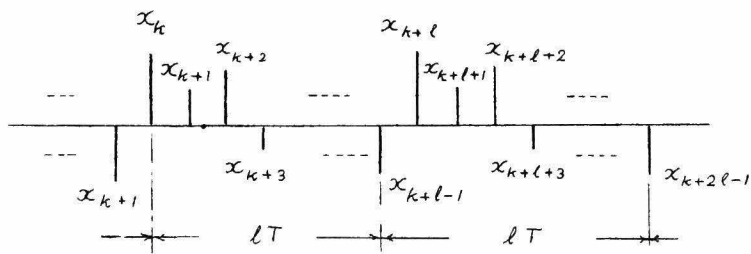


図 6.2 周期 lT の繰返しパルス列

ここで取り上げる問題は、例えば図 4.1 の制御装置出力に現れるサンプル値列に注目した場合、図 6.2 に示すように、サンプリング周期の l 倍

* 式 (6.2) の導出は 7.3, 式 (7.27) 参照。

($l = 2, 3, 4, \dots$) 毎に同一のパルス列の繰返しが見られるような現象について、その平衡条件および平衡状態が存在する場合には、その平衡状態が安定で実際に持続するものであるかどうかの安定判別について考察するものである。

一般にサンプル値系に現れる非線形振動の周期は必ずしもサンプリング周期 T の整数倍にかぎらない。むしろ整数倍の振動は極く特殊な場合であると言えよう。しかしながら両者の関係が非整数の場合について一般的に論ずることは、さきに述べたように $\omega \ll \omega_s$ でサンプラーの作用が信号に対し単に $1/T$ なるゲイン変化をもたらすものと近似できる場合を除いて非常にむづかしい。したがって、ここでは現象をサンプリング周期の整数倍の場合にかぎって取り扱い、さきに示した 5.2 における實際例にみられるようなサンプル値系における整数次振動の平衡の概観を説明しようとするものである。

なお、図 6.3 に示すようなリレーを含むサンプル値制御系(落下枠機構を有する制御系、サンプリング・オンオフ制御系)においては、図 6.3 に示すようにリレー出力の極性の反転はサンプリング時点のみで行われることになり、サンプリング周期の整数倍を周期とする振動現象は、後述の例題に示すよ

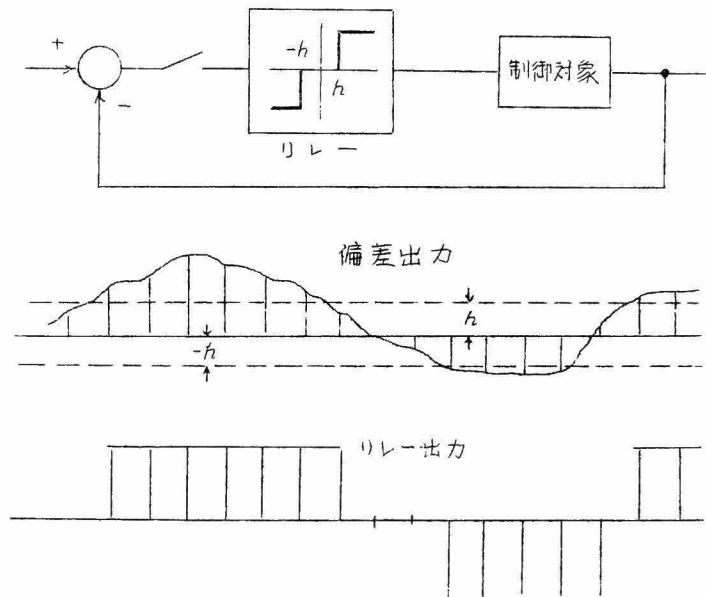


図 6.3 サンプリング・オンオフ制御系

うに比較的よく見られる。(6.6.4 参照)

6.2 非線形パラメータと基本平衡条件式

図 6.4 に示すように非線形特性 N を含むサンプル値制御系において、サンプリング周期 T の

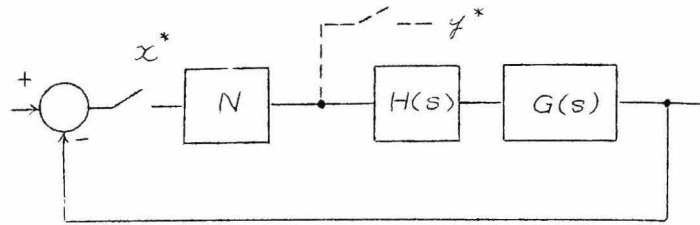


図 6.4 非線形特性 N を含むサンプル値制御系

整数倍 lT を周

期とする振動が平衡している場合を仮定すると、その振動の 1 周期に含まれる l 個の非線形要素入力パルスは図 6.5 に示すように非線形要素を

通過することによって各々 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ なる重み係数がかけられて出力に現われることになる。非線形特性によるこのような効果は、図 6.6 に示すようにループ・ゲインが一サンプリング毎に l 個の値 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ 倍に順次繰返し切換えられる等価回路でおきかえることができる。

このような考え方をサンプル値系の非線形振動の解析に応用する場合、

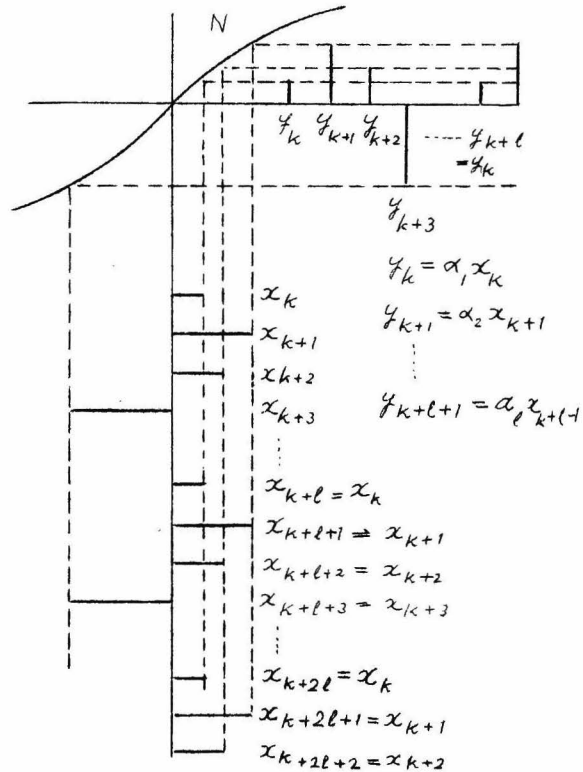


図 6.5 非線形要素入出力パルス列

上記 $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ は非線形パラメータとも称すべきもので、これらは非線形要素入力パルス個々の関数であると同時に、非線形要素 N の性質によりその関数形を異にする。以下に説明する方法はこれ

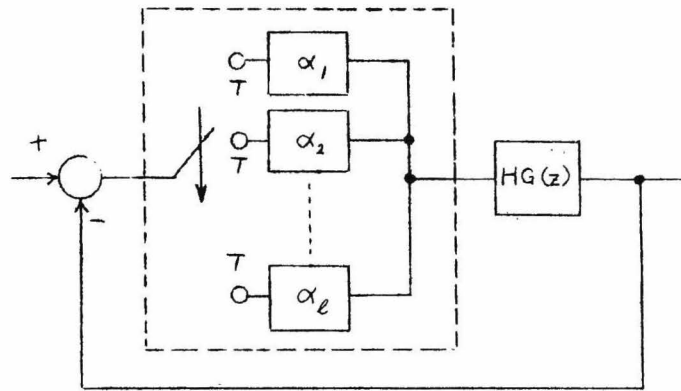


図 6.6 周期 ℓT の振動が平衡している場合の図 6.4 の系の等価回路

ら非線形パラメータの関数形を直接取り上げることなく、与えられた系に対し決定されたパラメータが当該非線形要素の特性に合致するものであるか否かを判定し、仮定せる整数次振動の平衡状態の有無およびその平衡状態、換言すれば振動自身の安定、不安定を判定しようとするものである。

いま図 6.4 における“制御対象”+“零次ホールド回路”の z 変換 $HG^*(z)$ が、つぎに示すように一般に z^{-1} の m 次多項式の比で表わされるものとする。

$$HG^*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} \quad (6.4)$$

サンプリング周期 T の ℓ 倍の整数次振動の場合、非線形要素入出力定常パルス列の z 変換 $\tilde{X}^*(z)$ 、 $\tilde{Y}^*(z)$ は ℓ 種類の非線形パラメータ $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ を用うることにより、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}^*(z) &= \sum_{i=1}^{\ell} x_i z^{-(i-1)} / (1 - z^{-\ell}), \\ \tilde{Y}^*(z) &= \sum_{i=1}^{\ell} y_i z^{-(i-1)} / (1 - z^{-\ell}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i z^{-(i-1)} / (1 - z^{-\ell}) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

いま自励振動の場合を考え、目標値入力 $r(t)$ の定常値はゼロと仮定す

ると、

$$\widetilde{X}^*(z) = -\widetilde{W}^*(z) = -HG^*(z)\widetilde{Y}^*(z) \quad (6.6)$$

ここに $\widetilde{W}^*(z)$ は制御系出力(制御量) $w(t)$ の z 変換であり、やはりサンプリング周期の ℓ 倍を周期とするパルス列の繰返しになる。

式(6.4)および(6.5)より $t=kT$ における制御系出力サンプル値 w_k はつぎの漸化式で表わされる。

$$w_k = a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_m y_{k-m} - b_1 w_{k-1} - \cdots - b_m w_{k-m} \quad (6.7)$$

まず $m \geq \ell$, すなわち線形部分の開ループ・パルス伝達関数 $HG^*(z)$ の次数 m が振動の整数次数 ℓ と同じ若しくは ℓ 以上の場合を考え、

$$(i+1)\ell + j = m; \quad i=0, 1, 2, \cdots; j=0, 1, 2, \cdots, (\ell-1) \quad (6.8)$$

とおけば式(6.7)はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} w_k = & a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_{\ell-1} y_{k-\ell+1} \\ & + a_{\ell} y_{k-\ell} + a_{\ell+1} y_{k-\ell-1} + \cdots + a_{2\ell-1} y_{k-2\ell+1} \\ & + a_{2\ell} y_{k-2\ell} + a_{2\ell+1} y_{k-2\ell-1} + \cdots + a_{3\ell-1} y_{k-3\ell+1} \\ & \vdots \\ & + a_{i\ell} y_{k-i\ell} + a_{i\ell+1} y_{k-i\ell-1} + \cdots + a_{(i+1)\ell-1} y_{k-(i+1)\ell+1} \\ & + a_{(i+1)\ell} y_{k-(i+1)\ell} + a_{(i+1)\ell+1} y_{k-(i+1)\ell-1} + \cdots + a_m y_{k-m} \\ & - b_1 w_{k-1} - b_2 w_{k-2} - \cdots - b_{\ell-1} w_{k-\ell+1} \\ & - b_{\ell} w_{k-\ell} - b_{\ell+1} w_{k-\ell-1} - \cdots - b_{2\ell-1} w_{k-2\ell+1} \\ & - b_{2\ell} w_{k-2\ell} - b_{2\ell+1} w_{k-2\ell-1} - \cdots - b_{3\ell-1} w_{k-3\ell+1} \\ & \vdots \\ & - b_{i\ell} w_{k-i\ell} - b_{i\ell+1} w_{k-i\ell-1} - \cdots - b_{(i+1)\ell-1} w_{k-(i+1)\ell+1} \\ & - b_{(i+1)\ell} w_{k-(i+1)\ell} - b_{(i+1)\ell+1} w_{k-(i+1)\ell-1} - \cdots - b_m w_{k-m} \end{aligned} \quad (6.9)$$

周期 ℓT の振動であることを考りよすることにより、

$$y_k = y_{k-l} = y_{k-2l} = \dots = y_{k-il} = y_{k-(i+1)l} = y_l = \alpha_l x_l$$

$$y_{k-1} = y_{k-l-1} = y_{k-2l-1} = \dots = y_{k-il-1} = y_{k-(i+1)l-1} = y_{l-1} = \alpha_{l-1} x_{l-1}$$

$$y_{k-j} = y_{k-l-j} = y_{k-2l-j} = \dots = y_{k-il-j} = y_{k-(i+1)l-j} = y_{l-j} = \alpha_{l-j} x_{l-j}$$

$$y_{k-j-1} = y_{k-l-j-1} = y_{k-2l-j-1} = \dots = y_{k-il-j-1} = y_{l-j-1} = \alpha_{l-j-1} x_{l-j-1}$$

$$y_{k-l+1} = y_{k-2l+1} = y_{k-3l+1} = \dots = y_{k-(i+1)l+1} = y_1 = \alpha_1 x_1$$

$$w_k = w_{k-l} = w_{k-2l} = \dots = w_{k-il} = w_{k-(i+1)l} = w_l = -x_l$$

$$w_{k-1} = w_{k-l-1} = w_{k-2l-1} = \dots = w_{k-il-1} = w_{k-(i+1)l-1} = w_{l-1} = -x_{l-1}$$

$$w_{k-j} = w_{k-l-j} = w_{k-2l-j} = \dots = w_{k-il-j} = w_{k-(i+1)l-j} = w_{l-j} = -x_{l-j}$$

$$w_{k-j-1} = w_{k-l-j-1} = w_{k-2l-j-1} = \dots = w_{k-il-j-1} = w_{l-j-1} = -x_{l-j-1}$$

$$w_{k-l+1} = w_{k-2l+1} = w_{k-3l+1} = \dots = w_{k-(i+1)l+1} = w_1 = -x_1$$

以上 (6 10)

なる対応を仮定すれば、上式および式 (6 9) より、

$$|1||A||Y_0| = -|1||B||X_2| \quad (6.11)$$

なる関係が成立する。ここに $||$ は行列記号である。すなわち、

$$|1| \equiv |1, 1, \dots, 1| \quad (1 \text{ 行 } l+2 \text{ 列})$$

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_j & a_{j+1} & \dots & a_{l-1} \\ a_l & a_{l+1} & \dots & a_{l+j} & a_{l+j+1} & \dots & a_{2l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{il} & a_{il+1} & \dots & a_{il+j} & a_{il+j+1} & \dots & a_{(i+1)l-1} \\ a_{(i+1)l} & a_{(i+1)l+1} & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

(i+2 行 l 列)

$$|B| \equiv \begin{vmatrix} 1 & b_1 & \dots & b_j & b_{j+1} & \dots & b_{l-1} \\ b_l & b_{l+1} & \dots & b_{l+j} & b_{l+j+1} & \dots & b_{2l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ie} & b_{ie+1} & \cdots & b_{ie+j} & b_{ie+j+1} & \cdots & b_{(i+1)e-1} \\ b_{(i+1)e} & b_{(i+1)e+1} & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(i+2 行 l 列)

$$|Y_l| = \begin{vmatrix} y_l \\ y_{l-1} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_l x_l \\ \alpha_{l-1} x_{l-1} \\ \vdots \\ \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 x_1 \end{vmatrix} \quad |X_l| = \begin{vmatrix} x_l \\ x_{l-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} \quad (l \text{ 行 } 1 \text{ 列})$$

(6.11)

ところが式 (6.7) なる漸化式は $t = kT$ における瞬間のみならず、
 $(k-1)T$, $(k-2)T$, \cdots , $(k-l-1)T$, すなわち振動の 1 周期に属する
 各サンプリング時点に対し成立しなければならない。したがって、

$$|Y_1| \equiv \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_l \end{vmatrix}, \quad |Y_2| \equiv \begin{vmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_l \\ \vdots \\ y_3 \end{vmatrix}, \quad |Y_3| \equiv \begin{vmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad |Y_l| \equiv \begin{vmatrix} y_l \\ y_{l-1} \\ y_{l-2} \\ \vdots \\ y_1 \end{vmatrix}$$

$$|X_1| \equiv \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_l \end{vmatrix}, \quad |X_2| \equiv \begin{vmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_l \\ \vdots \\ x_3 \end{vmatrix}, \quad |X_3| \equiv \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad |X_l| \equiv \begin{vmatrix} x_l \\ x_{l-1} \\ x_{l-2} \\ \vdots \\ x_1 \end{vmatrix}$$

(6.12)

と表わすものとすれば、

$$|I| |A| |Y_k| = - |I| |B| |X_k| \quad k = l, l-1, \cdots, 2, 1$$

(6.13)

が平衡状態において成立しなければならない。上式を書替えば、

$$\begin{vmatrix} (A_1\alpha_1+B_1) & (A_2\alpha_{l-1}+B_2) & \cdots & (A_l\alpha_1+B_l) \\ (A_2\alpha_l+B_2) & (A_3\alpha_{l-1}+B_3) & \cdots & (A_1\alpha_l+B_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_l\alpha_l+B_l) & (A_1\alpha_{l-1}+B_1) & \cdots & (A_{l-1}\alpha_l+B_{l-1}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_l \\ x_{l-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

(6.14)

すなわち $\alpha_1 \sim \alpha_l$ または $x_1 \sim x_l$ に関する l 元連立一次方程式である。ここに $A_1 \sim A_l$, $B_1 \sim B_l$ は各々

$$A_1 = a_0 + a_{\ell} + a_{2\ell} + \cdots + a_{i\ell} + a_{(i+1)\ell}$$

$$A_2 = a_1 + a_{\ell+1} + a_{2\ell+1} + \cdots + a_{i\ell+1} + a_{(i+1)(\ell+1)}$$

$$\vdots$$

$$A_{j+1} = a_j + a_{\ell+j} + a_{2\ell+j} + \cdots + a_{i\ell+j} + a_m$$

$$A_{j+2} = a_{j+1} + a_{\ell+j+1} + a_{2\ell+j+1} + \cdots + a_{i\ell+j+1}$$

$$\vdots$$

$$A_{\ell} = a_{\ell-1} + a_{2\ell-1} + a_{3\ell-1} + \cdots + a_{(i+1)\ell-1}$$

$$B_1 = 1 + b_{\ell} + b_{2\ell} + \cdots + b_{i\ell} + b_{(i+1)\ell}$$

$$B_2 = b_1 + b_{\ell+1} + b_{2\ell+1} + \cdots + b_{i\ell+1} + b_{(i+1)(\ell+1)}$$

$$\vdots$$

$$B_{j+1} = b_j + b_{\ell+j} + b_{2\ell+j} + \cdots + b_{i\ell+j} + b_m$$

$$B_{j+2} = b_{j+1} + b_{\ell+j+1} + b_{2\ell+j+1} + \cdots + b_{i\ell+j+1}$$

$$\vdots$$

$$B_{\ell} = b_{\ell-1} + b_{2\ell-1} + b_{3\ell-1} + \cdots + b_{(i+1)\ell-1} \quad \text{以上 (6.15)}$$

で表わされ 式 (6.11) $|A|$ および $|B|$ に示すように $HG^*(z)$ の分子分母の z^{-1} に関する多項式の係数を昇べきの順に左上から ℓ 個ずつ配列して行列をつくり、各列の要素の和をとればよいことになる。

$m < \ell$ の場合には式 (6.15) はつぎのように表わされる。

$$A_1 = a_0 \qquad B_1 = 1$$

$$A_2 = a_1 \qquad B_2 = b_1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc}
 A_m = a_m & B_m = b_m & \\
 A_{m+1} = 0 & B_{m+1} = 0 & \\
 \vdots & \vdots & \\
 A_\ell = 0 & B_\ell = 0 & (6.16)
 \end{array}$$

式(6.14)における非線形パラメータ $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ は非線形特性が図6.5に示すように入力の1価関数で表わされる場合には、それぞれ $x_1 \sim x_\ell$ に対応して一意的に決定されるべきものである。したがって式(6.14)の含む未知数は $x_1 \sim x_\ell$ または $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ の ℓ 個となり、式の数と等しくなる。したがって式(6.14)は非線形要素が一価関数である場合の周期 ℓT なる整数次振動の基本平衡条件式である*。

以上の説明より推測できるようにこの方法による解析においては、制御系の次数 m の高いことは何等解析を困難にしないが、振動周期 ℓ が増えると未知数の数が増え手数がかかるようになる。

6.3 非線形特性と非線形パラメータ

サンプル値制御系と考えられる非線形特性中、重要なのはすでに述べたように制御装置その他、制御系構成要素を経済的に設計しようとする

* 非線形特性が図6.7に示すように2価関数の場合においては、1つの入力パルス x_i に対し、 y_{i1}, y_{i2} の種類の出力が考えられ、式(6.14)だけでは完全に平衡状態を表わすことはできない。この場合には相隣れるパルスの増加分 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ を考りよし、別に条件式を導く必要がある。つぎに $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ が非線形パラメータではなく、ループ・ゲインが T 毎に $\alpha_1 \sim \alpha_\ell$ 倍に順次切換わるような変定数系 (time varying system) の場合には式(6.14)の $x_1 \sim x_\ell$ の係数でつくられる行列式 $= 0$ が同期振動発生条件である。

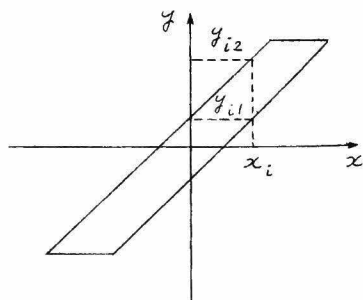


図 6.7

ところから現れる飽和現象と、制御系の特性を改善したり希望する制御特性を得るため積極的に非線形特性を利用する場合に見られる飽和要素およびリレーである。

本節においては飽和特性とリレー特性について表記非線形パラメータが如何に表わされるかについて考える。

6.3.1 飽和特性と非線形パラメータ

ここでは簡単のため、図 6.8 (a) に示すような理想的飽和特性について考える。この場合、非線形パラメータは同図 (b) のように表わされる。すなわち入力 $x(t)$ のサンプル値パルス列を

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \cdots + x_1 \delta(t) + x_2 \delta(t-T) + \cdots \\ &= \sum_k x_k \delta(t - k-1 T) \end{aligned} \quad (6.17)$$

で表わすものとすれば、

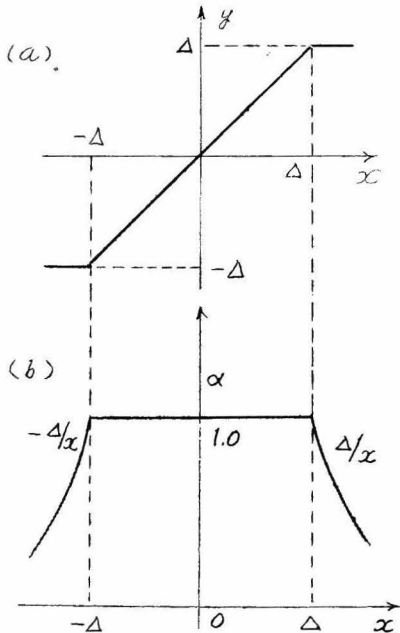


図 6.8 非線形特性と非線形パラメータ (飽和の場合)

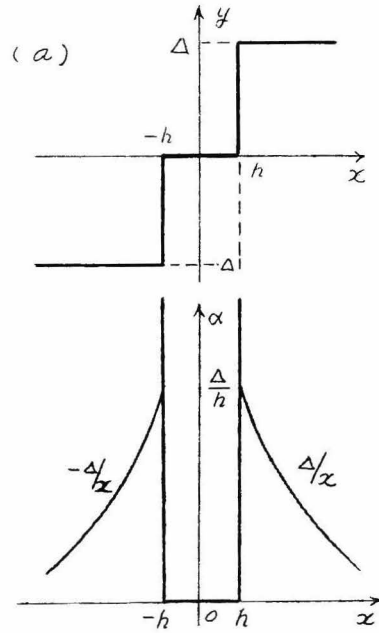


図 6.9 非線形特性と非線形パラメータ (リレーの場合)

$$\begin{aligned} -\Delta \leq x_k \leq \Delta \text{ のとき } \alpha_k &= 1 \\ |x_k| \geq \Delta \text{ のとき } \alpha_k &= \Delta / |x_k| \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.3.2 リレー特性と非線形パラメータ

リレー制御系では普通定常状態付近におけるチャタリング (chattering) を防止するため、図 6.9 (a) に示すように中立帯を設ける場合が多い。中立帯の巾を $\pm h$ とすれば非線形パラメータは同図 (b) に示すようになる。すなわち、

$$\begin{aligned} -h < x_k < h \text{ のとき } \alpha_k &= 0 \\ |x_k| > h \text{ のとき } \alpha_k &= \Delta / |x_k| \\ |x_k| = h \text{ のとき } \alpha_k &= \Delta / h \cdot \delta(t - k-1 T) \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.4 周期 lT の整数次振動の有無の吟味方法

図 6.4 に示す非線形サンプル値制御系において、繰返し周期 lT の整数次振動が平衡するためには制御系の線形部分の開ループ・パルス伝達関数 $HG^*(z) = Z[H(s)G(s)]$ の次数にかかわらず式 (6.14) に示した基本平衡条件式が成立しなければならない。

本節においては、与えられた系が周期 lT の振動の平衡点を有するか否かをこの平衡条件式を用いて見出す方法について説明する。

図 6.4 における非線形要素 N が図 6.8 (a) に示すような理想的飽和特性である場合、その入力パルス $x_1 \sim x_\ell$ のすべてが飽和しない場合については明らかに考察する必要がない。これは図 6.4 において N を取り去った状態、すなわち線形系自身周期 lT の線形振動の安定限界におかれていることを意味する。したがって基本平衡条件式 (6.14) の吟味は ℓ 個の入力パルスのうち 1 個、2 個、……、 ℓ 個が飽和する場合につき行えばよいことになる。繰返し数 $\ell = 2, 3, 4$ につき、その組合せの数および組合せ方法を示したのが図 6.10 である。

いま吟味方法の例として $\ell = 3$ の場合につき平衡点の存在条件を求め

て見よう。この場合図 6.10 よりわかるように吟味すべき組合せは 4 通り存在する。すなわち、

$$(1) \quad \alpha_1 x_1 = \Delta,$$

$$\alpha_2 = 1$$

$$\alpha_3 = 1 \quad (6.20)$$

式 (6.20) の関係を用うることにより式 (6.14) の平衡条件式は x_1 , x_2 および x_3 に関する 3 元 1 次連立方程式となる。

$$\begin{vmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 & B_3 \\ A_2+B_2 & A_3+B_3 & B_1 \\ A_3+B_3 & A_1+B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_3 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \Delta$$

$$(6.21)$$

したがって、この場合に対する繰返し 3 の振動の平衡点の存在条件は式 (6.21) より求められた x_1 , x_2 および x_3 の値に対しつぎの不等式

$$0 < \frac{\Delta}{x_1} \leq 1,$$

$$|x_2| \leq 1,$$

$$|x_3| \leq 1 \quad (6.22)$$

が成立することである。

$$(2) \quad \alpha_1 x_1 = \Delta,$$

$$\alpha_2 x_2 = \Delta$$

$$\alpha_3 = 1$$

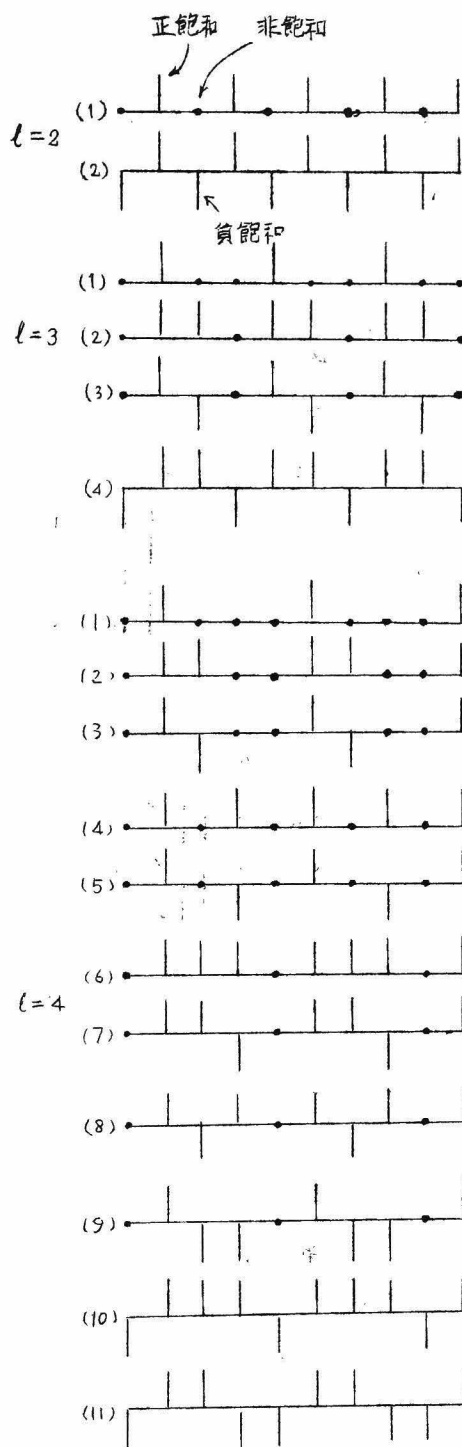


図 6.10 $l=2, 3, 4$ の場合に対する
実在可能な平衡状態

$$\begin{vmatrix} A_1+B_1 & B_2 & B_3 \\ A_2+B_2 & B_3 & B_1 \\ A_3+B_3 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_2+A_3 \\ A_3+A_1 \\ A_1+A_2 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.23)$$

上式より求められた x_1 , x_2 および x_3 に対し,

$$0 < \frac{\Delta}{x_1} \leq 1, \quad 0 < \frac{\Delta}{x_2} \leq 1, \quad |x_3| \leq 1 \quad (6.24)$$

が満足される場合、図 6.10, $\ell=3$ (2) の振動の平衡点が存在する。同じようにして同図 (3), (4) の振動の平衡点は各々

$$(3) \quad \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta, \quad \alpha_3 = 1$$

$$\begin{vmatrix} A_1+B_1 & B_2 & B_3 \\ A_2+B_2 & B_3 & B_1 \\ A_3+B_3 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_3-A_2 \\ A_1-A_3 \\ A_2-A_1 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.25)$$

$$0 < \frac{\Delta}{x_1} \leq 1, \quad 0 < \frac{\Delta}{x_2} \leq \Delta, \quad |x_3| \leq 1 \quad (6.26)$$

$$(4) \quad \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta \quad (6.27)$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_1 \\ B_3 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_3-A_1-A_2 \\ A_1-A_2-A_3 \\ A_2-A_3-A_1 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.28)$$

$$0 < \frac{\Delta}{x_i} \leq 1 \quad (i=1, 2, 3) \quad (6.29)$$

で与えられる。

以上のことからわかるように繰越し数 ℓ が多くなると吟味すべき組合せの数が増え、手数がかかるようになる。しかしながら何等かの附帯的条件が与えられている場合には、各組合せのうち多くのものはその吟味が非常に簡単になる。例として $HG^*(z)$ が $z=1$ に少なくとも1つ極を持つ場合、すなわち線形開ループパルス伝達関数が積分特性を有する場合には $HG^*(z)$ の分母 $1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\cdots+b_m z^{-m}$ は少なくとも1つ $(1-z^{-1})$ なる因数を含む。したがって式(6.15)より明らかのように

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_\ell = 0 \quad (6.30)$$

なる附帯条件が成立する。例えばこの条件を図 6.10 $l=4$ に示した11通りの組合せについて考えると、

(i) $l=4$, (2)の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 1 \quad (6.31)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & B_3 & B_4 \\ A_2 + B_2 & A_3 + B_3 & B_4 & B_1 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 & B_1 & B_2 \\ A_4 + B_4 & A_1 + B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_3 + A_4 \\ A_4 + A_1 \\ A_1 + A_2 \\ A_2 + A_3 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.32)$$

上記各式の両辺の和を求め 式(6.30)の附帯条件を用うることにより

$$x_4 + x_3 = -2\Delta \quad (6.33)$$

ところがこの平衡状態が存在するためには式(6.32)の根の間につきの不等式が成立しなければならない。

$$0 < \alpha_1 = \frac{\Delta}{x_1} \leq 1, \quad 0 < \alpha_2 = \frac{\Delta}{x_2} \leq 1,$$

$$|x_3| \leq \Delta, \quad |x_4| \leq \Delta \quad (6.34)$$

式(6.33)および(6.34)より明らかに

$$x_3 = x_4 = -\Delta \quad (6.35)$$

これは開ループ伝達関数が積分要素を含む場合、振動がサンプリング周期の整数倍のときには飽和非線形要素の出力波形は、その一周に亘る積分が零でなければならないことを意味する。このように x_3 および x_4 は与えられてしまいうから式(6.32)は x_1, x_2 に関する2元連立方程式となる。 x_1, x_4 が式(6.32)の4つの関係を同時に満足するのはこの式のうち 2つが他の2つに従属でなければならず、系のパラメータから決まる $A_1 \sim A_3, B_1 \sim B_3$ の間に特定の関係が存在するときだけである。この場合には式(6.32)のうち互に独立な2つの式をとり、2元1次連立方程式の根 x_1 および x_2 を求め、式(6.34)中の前2つの不等式が満足されるか否かを吟味すればよい。なお図 6.10, $l=4$, (1)もこの場合に含まれ、吟味から除外されることは明らかである。

(ii) $\ell = 4$, (3) の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 1 \quad (6.36)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & B_3 & B_4 \\ A_2 + B_2 & A_3 + B_3 & B_4 & B_1 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 & B_1 & B_2 \\ A_4 + B_4 & A_1 + B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_4 - A_3 \\ A_1 - A_4 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - A_2 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.37)$$

附帯条件より明らかにつぎの関係が成立する。

$$x_4 = -x_3 \quad (6.38)$$

この結果はあえて式(6.37)をとかななくとも、系が積分要素を含む場合には非線形要素出力波形の1周期に亘る積分値が零にならねばならぬことから容易に考えられることである。

この場合、平衡条件式は x_1, x_2 および x_3 (または x_4) に関する3元1次連立方程式となる。平衡点存在条件はこれら3根が、

$$0 < \alpha_1 = \frac{\Delta}{x_1} \leq 1, \quad 0 < \alpha_2 = \frac{\Delta}{x_2} \leq 1, \quad |x_3| \leq \Delta \quad (6.39)$$

を満足することである。

(iii) $\ell = 4$, (4) の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 x_3 = \Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (6.40)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 + B_1 & B_2 & A_3 + B_3 & B_4 \\ A_2 + B_2 & B_3 & A_4 + B_4 & B_1 \\ A_3 + B_3 & B_4 & A_1 + B_1 & B_2 \\ A_4 + B_4 & B_1 & A_2 + B_2 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_2 + A_4 \\ A_3 + A_1 \\ A_4 + A_2 \\ A_1 + A_3 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.41)$$

この場合、附帯条件より明らかに、

$$x_2 + x_4 = -2\Delta \quad (6.42)$$

ところがこの平衡条件を満足するためには式(6.41)の根の間につぎの不等式が成立しなければならない。

$$0 < \alpha_1 = \frac{\Delta}{x_1} \leq 1, \quad |x_2| \leq \Delta, \quad 0 < \alpha_3 = \frac{\Delta}{x_3} \leq 1, \quad |x_4| \leq \Delta$$

(6.43)

式(6.42), (6.44)より明らかに

$$x_2 = x_4 = -\Delta \quad (6.44)$$

この結果はさきに述べた通り系が積分特性を有することからも明らかである。この場合吟味すべき平衡条件式は x_1 および x_3 に関する2元1次連立方程式となり、係数 $A_1 \sim A_4$, $B_1 \sim B_4$ の間に特別の関係が無い限りかかる平衡状態は存在しない。

(iv) $\ell = 4$, (5) の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (6.45)$$

付帯条件により、

$$x_2 = -x_4 \quad (6.46)$$

が成立し、(ii) の場合と同じく x_1 , x_3 および x_2 (または x_4) に関する3元1次連立方程式を吟味すればよいことになる。

(v) $\ell = 4$, (6) の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = \Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (6.47)$$

付帯条件より、

$$x_4 = -3\Delta \quad (6.48)$$

すなわち $|x_4| > \Delta$ したがって $\alpha_4 < 1$ となり、式(6.45)の条件に反する。したがってこの様な平衡状態は存在しないことになる。

(vi) $\ell = 4$, (7), (8), (9) の場合、すなわち

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (7) \text{ の場合}$$

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_3 x_3 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (8) \text{ の場合}$$

$$\alpha_1 x_1 = -\Delta, \quad \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = \Delta, \quad \alpha_4 = 1 \quad (9) \text{ の場合}$$

(6.49)

付帯条件より明らかに、

$$x_4 = -\Delta \quad ((7), (8) \text{ の場合})$$

$$x_4 = \Delta \quad ((9) \text{ の場合}) \quad (6.50)$$

が成立し 平衡点存在条件式は、 x_1, x_2 および x_3 に関する 3 元 1 次連立方程式となる。

(vii) $\ell = 4$, (10) の場合、すなわち、

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = \Delta, \quad \alpha_4 x_4 = -\Delta \quad (6.51)$$

附帯条件より明らかに平衡点は存在しない。

(viii) $\ell = 4$, (1) の場合、すなわち、

$$\alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1 \quad (6.52)$$

この場合には上記附帯条件の利用価値はほとんどなく、4 元 1 次連立方程式の根について吟味する必要がある。

図 6.4 に示す非線形要素 N が中立帯を含むリレー要素である場合においても式 (6.18) の関係を用うる代りに式 (6.19) の関係を使用することにより同様に平衡点の有無の判定を行なうことができる。非線形要素がリレーであり、かつ上述のような附帯条件が存在する場合には平衡条件式の吟味は非常に簡単である。

6.5 サンプル値整数次振動の平衡状態の安定問題

6.5.1 サンプル値系に対する変分方程式

以上の吟味の結果見出された周期的平衡状態が安定に持続し観測し得るのは強制振動、自励振動の如何を問わず、それらが安定平衡点である場合に限られる。

図 6.4 における非線形要素 N の入出力パルス列 $\tilde{x}^*(t)$, $\tilde{y}^*(t)$ が式 (6.5) で表わされるところの周期 ℓT の定常周期的パルス列とする。出力パルス列 $\tilde{y}^*(t)$ は一般に、

$$\tilde{y}^*(t) \equiv \tilde{y}[\tilde{x}^*(t)] \quad (6.53)$$

と表現される。自励振動の場合、図 6.4 よりつぎの関係が導びかれる。

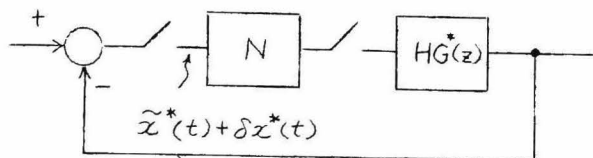
$$Z[\tilde{x}^*(t)] = -HG^*(z)Z\{\tilde{y}^*[\tilde{x}^*(t)]\} \quad (6.54)$$

上式で表わされる平衡状態が外乱により乱され、微小な非周期的パルス列、

$$\delta x^*(t) = \delta x_0 \delta(t) + \delta x_1 \delta(t-T) + \delta x_2 \delta(t-2T) + \dots$$

(6.55)

が上記周期振動に重畳するものと仮定する。このとき非線形要素入力に加えられるパルス入力
は図 6.11 に示すよう
に非周期的パルス列、



$\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)$ とな

る。これに対する非線
形要素出力パルス列は

$$y^*[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)]$$

で表わされ、やはり非周期的パルス列である。図 6.11 よりつぎの関係
式が成立する。

$$Z[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)] = -HG^*(z) Z\{y^*[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)]\}$$

(6.56)

ところが、

$$Z[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)] = Z[\tilde{x}^*(t)] + Z[\delta x^*(t)] \quad (6.57)$$

であるから式 (6.54), (6.56) より、

$$Z[\delta x^*(t)] = -HG^*(z) Z\{y^*[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)] - \tilde{y}^*[\tilde{x}^*(t)]\}$$

(6.58)

上式を変形して

$$Z[\delta x^*(t)] = -HG^*(z) Z\left\{ \frac{y^*[\tilde{x}^*(t) + \delta x^*(t)] - \tilde{y}^*[\tilde{x}^*(t)]}{\delta x^*(t)} \cdot \delta x^*(t) \right\}$$

(6.59)

$\delta x^*(t)$ は微小パルス列であるから、

$$Z[\delta x^*(t)] = -HG^*(z) Z\{\dot{y}^*[\tilde{x}^*(t)] \delta x^*(t)\} \quad (6.60)$$

上式における $\dot{y}^*[\tilde{x}^*(t)]$ は非線形要素の入力変数 $\tilde{x}^*(t)$ に関する導関数であるが、 $\tilde{x}^*(t)$ は $1T$ を周期とする周期的パルス列で、式 (6.5) に示されるように、 x_1, x_2, \dots, x_i なる種類の大きさのパルスの繰返しを表わす。したがって若し非線形特性が例えば、図 6.8 に示される

ような理想的飽和特性である場合には $\dot{y}[\tilde{x}^*(t)]$ はつぎのように表わされる。

$$\dot{y}^*[\tilde{x}^*(t)]|_{x_k} = \xi_k ;$$

ただし

$$\begin{aligned} |x_k| > \Delta \text{ のとき } & \xi_k = 0 \\ |x_k| < \Delta \text{ のとき } & \xi_k = 1 \end{aligned} \quad (6.61)^*$$

したがって

$$\begin{aligned} \dot{y}^*[\tilde{x}^*(t)]\delta x^*(t) = & \dots + \xi_1 \delta x_1 \delta(t-T) + \xi_2 \delta x_2 \delta(t-2T) + \dots + \xi_\ell \delta x_\ell \delta(t-\ell T) \\ & + \xi_1 \delta x_{\ell+1} \delta(t-\ell+1T) + \xi_2 \delta x_{\ell+2} \delta(t-\ell+2T) + \dots \\ & + \xi_\ell \delta x_{2\ell} \delta(t-2\ell T) + \xi_1 \delta x_{2\ell+1} \delta(t-2\ell+1T) \\ & + \xi_2 \delta x_{2\ell+2} \delta(t-2\ell+2T) + \dots \end{aligned} \quad (6.62)$$

すなわち、サンプリング周期 T の整数倍、 ℓT を周期とする整数次振動の平衡状態の安定問

題は図 6.12 に示す。

ように T 毎にループ・ゲインが $\xi_1 \sim \xi_\ell$ なる ℓ 種類の値に繰返し切換えられる可変ゲインサンプリング系の安定問題に帰着する。

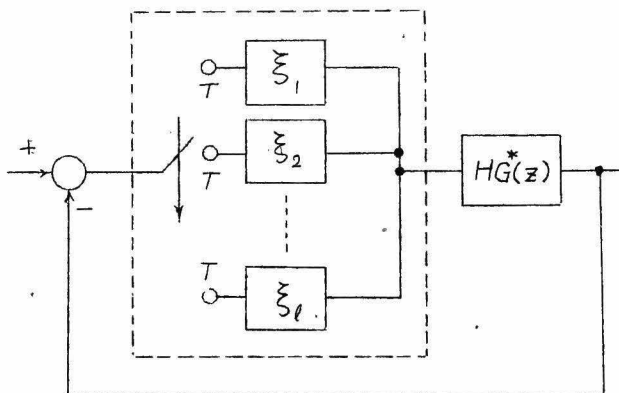


図 6.12 微小非周期的パルス列 $\delta x^*(t)$ に対する図 6.11 の系の等価回路

6.5.2. 可変ゲインサンプリング系の安定判別

図 6.12 の系は線形系であるからこの系の安定判別は、目標値入力としてたとえば単位インパルス $\delta(t)$ を加え、系に動振を与えてその発散

* $|x_k| = \Delta$ の場合については 6.6 参照

(5) 収束を見きわめればよい。この系が安定であれば $\tilde{z}^*(t)$ もしくは $\tilde{y}^*(t)$ で表わされる周期 LT の振動は安定に持続し、物理的に観測しうるものであり、この系が不安定ならば同期 LT の平衡状態は不安定リミット・サイクルなることを意味し、実際にこれを持続させることはできない。

(6) いま線形伝達要素 (零次ホールドを含む) の z 変換 $HG^*(z)$ が

$$HG^*(z) \equiv \frac{N(z)}{M(z)}, \quad M(z) \equiv (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)$$

$$r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_m \quad (6.63)$$

$t=kT$ における $HG^*(z)$ のインパルス応答の値が g_k で表わされるものとする。

$$g_0 = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{HG^*(z)}{z} dz = HG^*(0) + \sum_{i=1}^m \frac{N(r_i)}{r_i M'(r_i)}$$

$$g_k = \frac{1}{2\pi j} \int HG^*(z) z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^m \frac{N(r_i)}{M'(r_i)} r_i^{k-1} \equiv \sum_{i=1}^m \phi(r_i) r_i^{k-1}$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots \quad (6.64)$$

ここに

$$\phi(r_i) = N(r_i)/M'(r_i) \quad M'(r_i) = dM(z)/dz \Big|_{z=r_i} \quad (6.65)$$

また目標値入力 $\delta(t)$ による過渡応答により発生する制御対象入力にお

けるパルス列を $C^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \delta(t-kT)$, $t=kT$ における入力パルス

C_k に起因する制御対象出力応答成分を $O^{k*}(t)$ で表わすものとする。

いま説明を簡単にするため、安定性を判別すべき周期的平衡状態の周期 LT は $2T$ と仮定する。この場合、取りあつかう可変ゲイン系はループゲインが $\xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \cdots$ という具合に2種類の値に T 毎に切換えられることになる。

$t=kT$ における図 6.12 の系の偏差サンプル値を ε_k とすれば ε_k C_k および $O^{k*}(t)$ はつぎのように計算される。

$$k=0:$$

$$\varepsilon_0 = 1/(1 + \xi_1 g_0) \equiv \Delta_1 \quad (6.66)$$

$$C_0 = \xi_1 \varepsilon_0 \quad (6.67)$$

$$O^{*}(t) = [g_0 \delta(t) + \sum \phi \delta(t-T) + \sum \phi r_i \delta(t-2T) + \sum \phi r_i^2 \delta(t-3T) + \dots] \xi_1 \Delta_1 \quad \text{ここに } \sum \phi r_i^j \equiv \sum_{i=1}^m \phi(r_i) r_i^j \quad (6.68)$$

$k=1$:

$$\varepsilon_1 = -\sum \phi \xi_1 \Delta_1 / (1 + \xi_2 g_0) \equiv -\sum \phi \xi_1 \Delta_1 \Delta_2 \equiv -|\phi| |\xi_1 \Delta_1| \Delta_2 \quad (6.69)$$

ただしここに

$$|\phi| \equiv |\phi(r_1), \phi(r_2), \dots, \phi(r_m)|$$

$$|\xi_1 \Delta_1| \equiv |1, 1, \dots, 1|_t \xi_1 \Delta_1 \quad (1 \text{ 行 } m \text{ 列}) \quad (6.70)$$

$|1|_t$ は転置行列の意

$$C_1 = \xi_2 \varepsilon_1 \quad (6.71)$$

$$O^{*}(t) = [g_0 \delta(t-T) + \sum \phi \delta(t-2T) + \sum \phi r_i \delta(t-3T) + \sum \phi r_i^2 \delta(t-4T) + \dots] [-\sum \phi \xi_1 \Delta_1 \xi_2 \Delta_2] \quad (6.72)$$

$k=2$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= [-\sum \phi r_i \xi_1 \Delta_1 + \sum \phi \xi_1 \Delta_1 \sum \phi \xi_2 \Delta_2] \Delta_1 \\ &= |\phi| [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] |\xi_1 \Delta_1| \Delta_1 \end{aligned} \quad (6.73)$$

ここに、

$$|\phi \xi_2 \Delta_2| \equiv \begin{vmatrix} \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \\ \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \end{vmatrix} \xi_2 \Delta_2 \quad (m \text{ 行 } m \text{ 列})$$

$$|r| \equiv \begin{vmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_m \end{vmatrix} \quad (6.74)$$

$$C_2 = \xi_1 \varepsilon_2 \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad o^{2*}(t) &= [\phi_0 \delta(t-2T) + \sum \phi \delta(t-3T) + \sum \phi r_i \delta(t-4T) \\
 (6.6) \quad &+ \sum \phi r_i^2 \delta(t-5T) + \dots] [-\sum \phi r_i \xi_1 \Delta_1 \\
 (6.6) \quad &+ \sum \phi \xi_1 \Delta_1 \sum \phi \xi_2 \Delta_2] \xi_1 \Delta_1 \quad (6.76)
 \end{aligned}$$

$k=3$:

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad \varepsilon_3 &= [-\sum \phi r_i^2 + \sum \phi r_i \sum \phi \xi_2 \Delta_2 + \sum \phi r_i \sum \phi \xi_1 \Delta_1 - (\sum \phi)^3 \xi_1 \Delta_1 \xi_2 \Delta_2] \xi_1 \Delta_1 \Delta_2 \\
 &= |\phi| [-|r|^2 + |r| |\phi \xi_1 \Delta_1| + |r| |\phi \xi_2 \Delta_2| - |\phi \xi_1 \Delta_1| |\phi \xi_2 \Delta_2|] |\xi_1 \Delta_1| \Delta_2 \\
 &= -|\phi| [|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|] [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] |\xi_1 \Delta_1| \Delta_2 \quad (6.77)^*
 \end{aligned}$$

ここに、

$$|\phi \xi_1 \Delta_1| \equiv \begin{vmatrix} \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \\ \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(r_1) & \phi(r_2) & \dots & \phi(r_m) \end{vmatrix} \quad \xi_1 \Delta_1 \quad (m \text{ 行 } m \text{ 列}) \quad (6.78)$$

以下同様にして一般に、

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{2k+1} &= -|\phi| \left\{ [|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|] [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] \right\}^k |\xi_1 \Delta_1| \Delta_2 \\
 \varepsilon_{2k} &= |\phi| [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] \left\{ [|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|] [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] \right\}^{k-1} |\xi_1 \Delta_1| \Delta_2 \quad (6.79)^{**}
 \end{aligned}$$

なる関係を導くことができる。したがって、この系が安定であるか否かは行列 $[|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|] [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|]$ の固有根 R が 1 より小であるか否かによって決定する。すなわち、

$$\det \{ R|U| - [|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|] [|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] \} = 0 \quad (6.80)$$

が系の安定問題を決定する特有方程式で、 R の次数は系の次数 m に等しい。上式における $|U|$ は m 行 m 列の単位行列である。

上式は、

$$* |\phi \xi_j \Delta_j| |r| \neq |r| |\phi \xi_j \Delta_j|$$

$$\text{しかしながら } |\phi| |\phi \xi_j \Delta_j| |r| |\phi \xi_j \Delta_j| = |\phi| |r| |\phi \xi_j \Delta_j| |\phi \xi_j \Delta_j|$$

** ξ_1 はゼロであってはならない。∵ 式 (6.79) は $t=0$ の瞬間加えられた単位インパルス $\delta(t)$ に対する過渡応答を与えるものであるから、 $\xi_1=0$ の場合には入力が加わらなかったことを意味する。このときには ξ_1 と ξ_2 を入れ換える。 $\xi_1=\xi_2=0$ のときには $HG(z)$ の安定不安定で平衡点の安定性が決定される。

$$R = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$$

なる双一次変換により R 平面単位円内を φ 平面虚軸左半面に写像することにより、 φ に関する方程式を導き、フルビッツの安定判別法を適用することができる。

また一般に、周期 ℓT の周期的平衡状態の安定判別は、

$$\det \{ R | U | - \prod_{j=1}^{\ell} [1 \phi \xi_j \Delta_j | - | r |] \} = 0 \quad (6.81)$$

の根 R を吟味することにより行うことができる*。

6.6 例 題

6.6.1 (5.2.1) 実際例その 1 (頁 96) に示した系の場合

この系はすでに述べたように外乱を考りよした有限整定時間応答系の 1 種であり、制御装置出力回路に飽和要素が存在する場合、入力の大さ如何によっては図 5.13 に示すように周期 $\ell T = 2T$ の不安定平衡状態が存在することが確かめられている。この系につき本解析法を適用してみる。

$$\frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} = D_F^*(z) H G^*(z) = \frac{2.3853 z^{-2} - 1.3853 z^{-3}}{1 - 2.3853 z^{-2} + 1.3853 z^{-3}} \quad (6.82)$$

この系につき周期 $\ell T = 2T$ の整数次振動の有無、平衡状態の安定判別を行う。式 (6.15) より、

$$\begin{aligned} A_1 &= a_0 + a_2 = 2.3853, & B_1 &= 1 + b_2 = -1.3853 \\ A_2 &= a_1 + a_3 = -1.3853, & B_2 &= b_1 + b_3 = 1.3853 \end{aligned} \quad (6.83)$$

図 6.10 より考えられる平衡状態はつぎの 2 組になる。すなわち、

* $\prod_{j=1}^{\ell} [1 \phi \xi_j \Delta_j | - | r |]$ は $[1 \phi \xi_1 \Delta_1 | - | r |] [1 \phi \xi_2 \Delta_2 | - | r |] \dots [1 \phi \xi_{\ell} \Delta_{\ell} | - | r |]$
 または $[1 \phi \xi_2 \Delta_2 | - | r |] [1 \phi \xi_3 \Delta_3 | - | r |] \dots [1 \phi \xi_{\ell} \Delta_{\ell} | - | r |] [1 \phi \xi_1 \Delta_1 | - | r |]$,
 ----、または $[1 \phi \xi_{\ell} \Delta_{\ell} | - | r |] [1 \phi \xi_1 \Delta_1 | - | r |] \dots [1 \phi \xi_{\ell-1} \Delta_{\ell-1} | - | r |]$ を意味する。

$$(i) \quad x_1 \geq \Delta \quad x_2 \leq -\Delta \quad (\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 x_2 = -\Delta) \quad (6.84)$$

この場合平衡条件式は、

$$B_1 x_2 + B_2 x_1 = -(A_2 - A_1) \Delta \quad (6.85)$$

$$B_2 x_2 + B_1 x_1 = (A_2 - A_1) \Delta$$

すなわち、

$$x_1 - x_2 = \frac{2(A_1 - A_2) \Delta}{B_2 - B_1} = \frac{3.7706}{1.3853} \Delta \doteq 2.72 \Delta \quad (6.86)$$

式(6.84)、(6.86)を満足する x_1 および x_2 の組合せは、

$$\Delta \leq x_1 \leq 1.72 \Delta, \quad -1.72 \Delta \leq x_2 \leq -\Delta \quad (6.87)$$

の範囲で無数に存在する。これは有限整定時間応答用制御装置の常として、 $D_F(z)$ が積分特性を含むため、周期的平衡状態は初期条件および外乱により、その平均値が図 6.13 に示すように飽和要素出力の平均値（ホールドされた飽和要素出力の一周期に亘る積分値）= 0 を満足する範囲内において浮動することを示している。

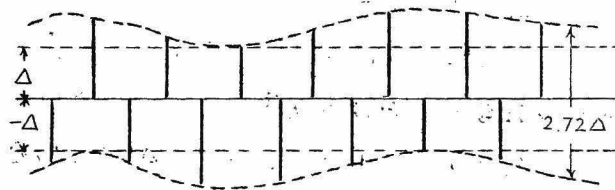


図 6.13 実際例その 1 (5.2.1) の系に存在する平衡状態。

$$(ii) \quad x_1 \geq \Delta$$

$$|x_2| \leq \Delta$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 = 1) \quad (6.88)$$

この場合平衡条件式は

$$(B_1 + A_1) x_2 + B_2 x_1 = -A_2 \Delta$$

$$(B_2 + A_2) x_2 + B_1 x_1 = -A_1 \Delta \quad (6.89)$$

すなわち

$$x_2 + 1.3853 x_1 = 1.3853 \Delta$$

$$1.3853 x_1 = 2.3853 \Delta \quad (6.90)$$

すなわち

$$x_1 = \frac{2.3853}{1.3853} \Delta \doteq 1.72 \Delta \quad (\alpha_1 \doteq 0.585)$$

$$x_2 = -\Delta \quad (\alpha_2 = 1)$$

(6.91)

上式の結果は式(6.88)の条件を満足しており、(1)の場合の限界に相当する。

つぎに式(6.87)で与えられる周期 $2T$ の平衡状態の安定問題につき考える。

式(6.63)および(6.65)より、

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 0.779, \quad r_3 = -1.779^*$$

$$\phi(r_1) = 1.628, \quad \phi(r_2) = -0.836, \quad \phi(r_3) = -0.792$$

(6.92)

つぎに ξ_1, ξ_2 の値について考える。式(6.87)において $x_1 \neq \pm\Delta$, $x_2 \neq \pm\Delta$ の場合は明らかに、

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

(6.93)

であり、図6.12の系の安定問題は $D_F^*(z)HG^*(z)$ 自身の安定問題に帰着する。ところが脚註に記したように $D_F^*(z)HG^*(z)$ は $|r_3| > 1$ なる不安定極を有し、系は不安定である。つぎに式(6.87)の限界における組合せ、例えば $x_1 \neq \pm\Delta$, $x_2 = -\Delta$ なる場合(式(6.91)の場合がこれに相当する。)を考えると図6.14より、

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \text{不定}$$

(6.94)

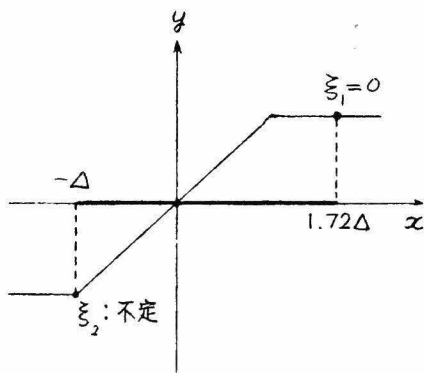


図 6.14 平衡点と ξ_i の関係

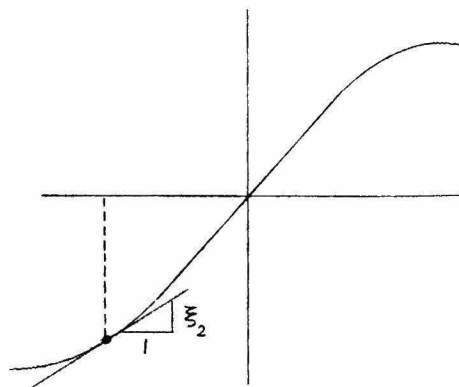


図 6.15 図 6.14 における ξ_2 の考え方

* r_3 は開ループ伝達関数の有する不安定極

となる。ところが、理想的飽和の場合には、その入出力特性は $|x| = \Delta$ において不連続的に変化するが、実際の飽和にあつては y/x は図 6.15 に示すように、ある曲率を以て傾斜 1 ($\xi = 1$ 線形域) から 0 ($\xi = 0$ 飽和域) に移行するものと考えられる。したがつてこの場合には、

$$\xi_1 = 0, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (6.95)$$

なる仮定の下に安定判別を行なえばよい。

式 (6.81) より、

$$\begin{aligned} & \det \{ R | U | - [| \phi \xi_1 \Delta_1 | - | r |] [| \phi \xi_2 \Delta_2 | - | r |] \} \\ &= R^3 - (4.772 - 1.395 \xi_2) R^2 + (5.693 - 3.328 \xi_2 - 0.313 \xi_2^2) R \\ &+ (-1.921 + 1.123 \xi_2 + 0.313 \xi_2^2 - 0.299 \xi_2^3) = 0 \quad (6.96) \end{aligned}$$

双一次変換により変数 R を φ に変換すれば、

$$\begin{aligned} & -(0.810 + 0.299 \xi_2^2) \xi_2 \varphi^3 + (1.702 + 1.354 \xi_2 - 0.626 \xi_2^2 + 0.897 \xi_2^3) \varphi^2 \\ & + (-3.684 + 5.302 \xi_2 + 1.252 \xi_2^2 - 0.897 \xi_2^3) \varphi + 13.39 - 5.846 \xi_2 - 0.626 \xi_2^2 \\ & + 0.299 \xi_2^3 = 0 \quad (6.97) \end{aligned}$$

上式の φ^3 , φ^2 , φ および φ^0 の係数の符号を考えれば ξ_2 を $0 \leq \xi_2 \leq 1$ の範囲内の如何なる値に送んでも、 φ は必ず不安定根を含む。したがつて本例に見られる周期 $2T$ の周期的平衡状態は不安定で持続しないことがわかる。

6.6.2 (5.2.2) 実際例その 2 (頁 97) に示した系の場合

この系も前者と同じく外乱を考りよした有限整定時間応答系の 1 種であり、やはり制御装置出力回路に飽和要素が存在する場合、入力の大さき如何によつては図 5.5 に示すように周期 $\ell T = 3T$ の不安定平衡状態が存在することが確かめられている。

$$\frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}} = D_F^*(z) H G^*(z) = \frac{2.8577 z^{-3} - 1.8577 z^{-4}}{1 - 2.8577 z^{-3} + 1.8577 z^{-4}} \quad (6.98)$$

この系につき周期 $\ell T = 3T$ の整数次振動の有無、平衡状態の安定判別を行う。式 (6.15) より、

$$A_1 = a_0 + a_3 = 2.8577, \quad B_1 = 1 + b_3 = -1.8577$$

$$\begin{aligned} A_2 &= a_1 + a_4 = -1.8577, & B_2 &= b_1 + b_4 = 1.8577 \\ A_3 &= a_2 = 0, & B_3 &= b_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.99)$$

$D_F^*(z)HG^*(z)$ は $z=1$ なる極を含み、すでに述べたように附帯条件

$$B_1 + B_2 + B_3 = 0 \quad (6.100)$$

が成立し、図 6.10 に示された 4 組の平衡状態のうち (2) および (4) は実現不可能で、考えられるのは以下に示す 2 組の場合になる。

$$(i) \quad x_1 \geq \Delta, \quad |x_2| \leq \Delta, \quad |x_3| \leq \Delta \quad (\because \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 = \alpha_3 = 1) \quad (6.101)$$

この場合平衡条件式は、

$$\begin{aligned} (B_1 + A_1)x_3 + (B_2 + A_2)x_2 + B_3 x_1 &= -A_3 \Delta \\ (B_2 + A_2)x_3 + (B_3 + A_3)x_2 + B_1 x_1 &= -A_1 \Delta \\ (B_3 + A_3)x_3 + (B_1 + A_1)x_2 + B_2 x_1 &= -A_2 \Delta \end{aligned} \quad (6.102)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ -1.8577 x_1 &= -2.8577 \Delta \\ x_2 + 1.8577 x_1 &= 1.8577 \Delta \end{aligned} \quad (6.103)$$

すなわち、

$$x_1 = \frac{2.8577}{1.8577} \Delta \doteq 1.55 \Delta > \Delta, \quad x_2 = -\Delta, \quad x_3 = 0 \quad (6.104)$$

上の結果は式 (6.101) の不等式を満足している。

$$(ii) \quad x_1 \geq \Delta, \quad x_2 \leq -\Delta, \quad |x_3| \leq \Delta \quad (\because \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 x_2 = -\Delta, \alpha_3 = 1) \quad (6.105)$$

この場合、平衡条件式は、

$$\begin{aligned} (B_1 + A_1)x_3 + B_2 x_2 + B_3 x_1 &= -(A_3 - A_2) \Delta \\ (B_2 + A_2)x_3 + B_3 x_2 + B_1 x_1 &= -(A_1 - A_3) \Delta \\ (B_3 + A_3)x_3 + B_1 x_2 + B_2 x_1 &= -(A_2 - A_1) \Delta \end{aligned} \quad (6.106)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} x_3 + 1.8577 x_2 &= -1.8577 \Delta \\ -1.8577 x_1 &= -2.8577 \Delta \\ -1.8577 x_2 + 1.8577 x_1 &= 4.7154 \Delta \end{aligned} \quad (6.107)$$

したがって、

$$x_1 = \frac{2.8577}{1.8577} \Delta \doteq 1.55\Delta > \Delta, x_2 = -\Delta, x_3 = 0 \quad (6.108)$$

すなわち、(i) の場合に一致する。したがって、この系では図 6.16 に示すような $\ell = 3$ の周期的平衡状態が存在する。

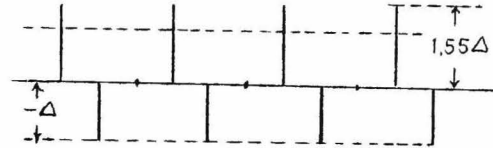


図 6.16 実際例その 2 (5.2.2) の系に存在する平衡状態

つぎにこの平衡点の安定問題であるが、式 (6.104) または (6.108) より、

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad 0 \leq \xi_3 \leq 1 \quad (6.109)$$

と考えられる。いま ξ_3 の値として限界値 $\xi_3 = 0$ の場合について考えれば、この平衡点の安定問題は $D_F^*(z)HG^*(z)$ 自身の安定問題に帰することはさきに述べた通りである。ところが本例においては $D_F^*(z)HG^*(z)$ の有する極は、

$$r_1 = 1, r_2 \doteq 0.779, r_3 \doteq -0.990 + j1.263, r_4 \doteq -0.990 - j1.263 \quad (6.110)$$

であり、 $|r_3| = |r_4| > 1$ なる不安定極を有し開ループ系は不安定である。したがって、この振動の平衡点も不安定である。 $0 \leq \xi_3 \leq 1$ に対する吟味は省略する。

6.6.3 安定な平衡状態を有する場合の例

以上の例題はいずれもその平衡点不安定な非線形振動であった。非線形特性 N が飽和であり しかも安定な周期的平衡状態を有する 1 例として図 6.17 に示す

ような系を考える。
この系の特性方程式の根は -0.1

$\pm \sqrt{1.61}$ で、いす

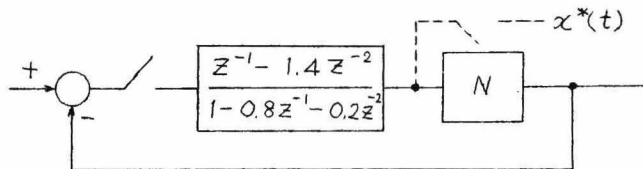


図 6.17 安定な周期的平衡状態を有する系

れも実数であり、そのうちの一つは負で絶対値は1より大きい。したがって飽和要素が無ければ $tT = 2T$ の振動、すなわち正負の交番パルス列が振幅無限大にまで発散する。

図 6.18 (a), (b) (c) は図 6.17 の非線形要素 N が飽和特性である場合の過渡応答 $x^*(t)$ を各種の大きさのパルス入力 $d(t) = d_0 \delta(t)$ に対して計算したものである。図よりわかるように、初期入力により平均値は異なるが定常状態においては、パルスの端から端までの大きさ 3Δ 、周期 $2T$ の安定なリミットサイクルを有することがわかる。平均値が初期値により異なるのは開ループ伝達関数が積分特性を含むことによる。

$$A_1 = a_0 + a_2 = -1.4, \quad B_1 = 1 + b_2 = 0.8$$

$$A_2 = a_1 = 1, \quad B_2 = b_1 = -0.8 \quad (6.111)$$

$$(i) \quad x_1 \geq \Delta, \quad x_2 \leq -\Delta \quad (\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta) \quad (6.112)$$

平衡条件式は

$$B_1 x_2 + B_2 x_1 = -(A_2 - A_1) \Delta$$

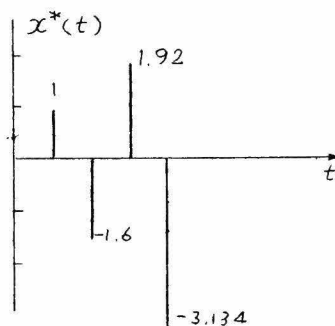
$$B_2 x_2 + B_1 x_1 = -(A_1 - A_2) \Delta \quad (6.113)$$

すなわち

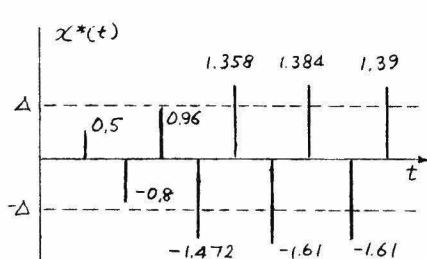
$$x_1 - x_2 = 3\Delta$$

式 (6.112), (6.114) を満足する

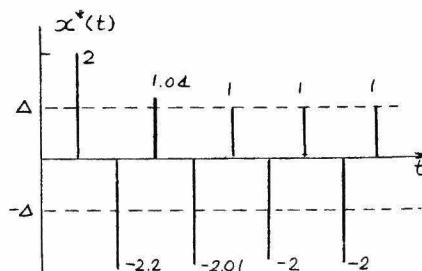
る x_1, x_2 の組合せは、



(a) 飽和要素がないとき $d_0 \ll \Delta$



(b) $\Delta = 1, d_0 = 0.5$



(c) $\Delta = 1, d_0 = 2$

図 6.18 図 6.17 の系の各種の大きさのインパルス入力に対する応答

* 正確には安定限界である。外乱等により平均値が浮動する。

$$2\Delta \geq x_1 \geq \Delta, \quad -\Delta \geq x_2 \geq -2\Delta \quad (6.115)$$

の範囲で無数に存在する。(図 6.18(b) の場合に該当する。)

$$(ii) \quad x_1 \geq \Delta, \quad |x_2| \leq \Delta \quad (\because \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad x_2 = 1) \quad (6.116)$$

平衡条件式は

$$(B_1 + A_1)x_2 + B_2 x_1 = -A_2 \Delta \quad (6.117)$$

$$(B_2 + A_2)x_2 + B_1 x_1 = -A_1 \Delta$$

すなわち

$$-0.6x_2 - 0.8x_1 = -\Delta$$

$$0.2x_2 + 0.8x_1 = 1.4\Delta \quad (6.118)$$

したがって

$$x_1 = 2\Delta > \Delta, \quad x_2 = -\Delta \quad (6.119)$$

この平衡状態は (i) の場合の限界になっている。(図 6.18(c) がこれに該当する。)

つぎにこの平衡点の安定問題につき考える。この場合、

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -0.2, \quad \phi(r_1) = -\frac{1}{3}, \quad \phi(r_2) = \frac{4}{3} \quad (6.120)$$

$$\xi_1 = 0, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (6.121)$$

式 (6.115) の不等式の限界 (等号の場合) を除く全パルス飽和のときには $\xi_2 = 0$ と考えればよい。この場合にはすでに述べたとおり、開ループ伝達関数 $HG(z)$ の極によって平衡点の安定性が論じられる。ところが本例においては $HG(z)$ の極は式 (6.120) に示すように 1 と -0.2 で $z=1$ なる安定限界の極 (積分性の極) を有する。したがって現象は図 6.19 に示すように正負両パルスが飽和域を離れない範囲で時々刻々

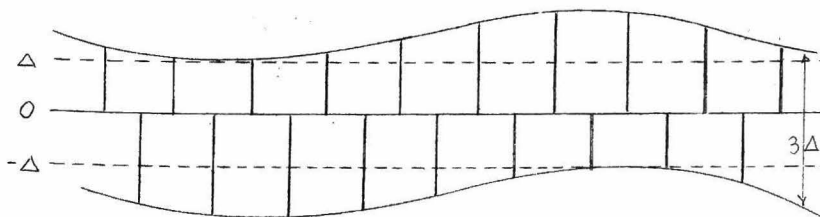


図 6.19 図 6.17 の系に存在する周期 $2T$ の安定平衡状態

加わる外乱により周期 $2T$, パルスの振中の和 3Δ の周期状態の平均値が浮動することが予想される。

$\xi_2 \neq 0$ の場合、(式 (6.115) の不等式の限界、すなわち式 (6.119) の平衡状態) の場合に対しては式 (6.120) および (6.121) より、

$$\det \{ R|U| - [|\phi \xi_1 \Delta_1| - |r|][|\phi \xi_2 \Delta_2| - |r|] \}$$

$$= R^2 - (1.04 + \frac{1.8}{3} \xi_2) R + 0.04 + \frac{0.84}{3} \xi_2 = 0 \quad (6.122)$$

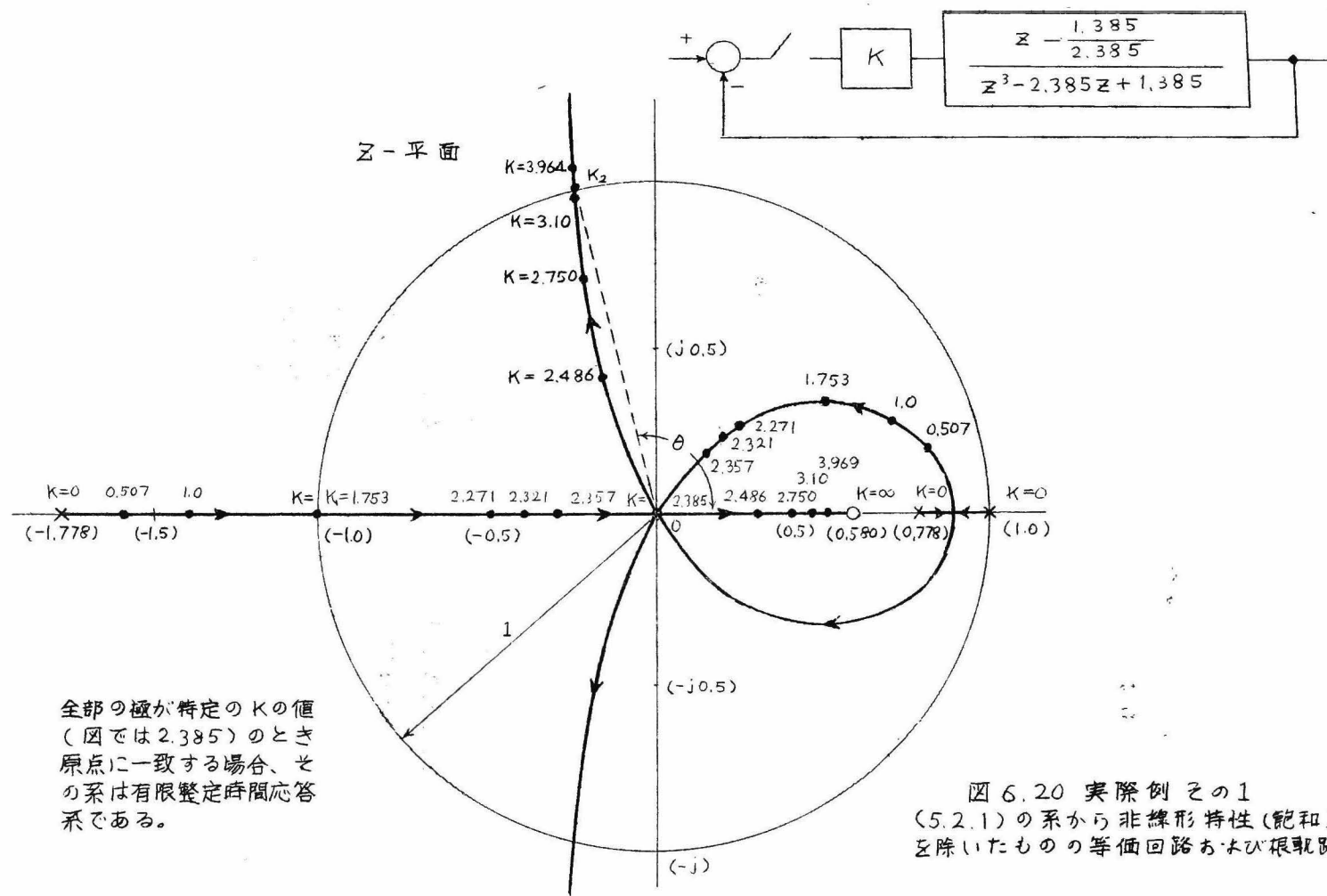
$$- \frac{0.96}{3} \xi_2 \varphi^2 + (1.92 + \frac{1.68}{3} \xi_2) \varphi + (2.08 + \frac{2.64}{3} \xi_2) = 0 \quad (6.123)$$

式 (6.123) より明らかなように、 $\xi_2 = 0$ (x_1, x_2 共完全飽和) のとき系は安定限界 $\xi_2 \neq 0$ (x_2 不完全飽和 図 6.15 参照) のとき不安定であることを示している。これは最初に述べたように、図 6.17 の系は線形動作では不安定であるので、各パルス中少しでも線形域で動作しているものがあるうちは ($\xi_2 \neq 0$) 不安定で振動は発散し 全パルスが完全に飽和してはじめて安定限界に入ることを示している*。

以上説明した3つの例のうち、前2例は開ループの伝達関数 $D_F^*(z)HG(z)$ がいずれも不安定極を含み 閉ループを構成することにより安定化されている系である。このような系においては、極く大略的に考えて、ループ中に飽和特性が存在すると等価的にループ一巡のゲインが下り、開ループの不安定な特性が現れてくるものと考えられる。図 6.20 は例題1 (すなわち 5.2.1 実際例その1) に示した有限整定時間応答系で飽和要素をとり去り、ゲイン定数を K としたときの根軌跡を示したものである。図よりわかるように、 $K=0$, すなわち開ループ状態では $\alpha = -1.778$ なる開ループ伝達関数の極のため、 $\ell=2$ の交番振動^{**}の発散が見られるが、ループゲインが増加し、 $K > K_1 \doteq 1.753$ に到ると根軌跡はすべて z 平面における原点を中心とする単位円内に入り、系は安定となる。而

* $\xi_2 = 0$ のとき $R^2 - 1.04R + 0.04 = 0$ すなわち $1.92\varphi + 2.08 = 0$

** 正負交互のパルスが交番的に現れる現象で、サンプル値系における最も高い周波数の振動である。



全部の極が特定の K の値 (図では 2.385) のとき原点に一致する場合、その系は有限整定時間応答系である。

図 6.20 実際例 その 1
(5.2.1) の系から非線形特性 (飽和) を除いたものの等価回路および根軌跡

して、 $K=2.385$ にえらんだ時、開ループ系は原点に三重根を持つようになり、2.2.2 実際例に示した有限整定時間応答系となる。 K の値が更に増加し、 $K > K_2 \doteq 3.2$ になると開ループ系は絶対値が1より大きな共軛複素根を含むようになる。かつ図より $K=K_2$ における安定限界での持続振動の周波数は約 $2\pi/\theta \cdot T = 3.5T$ で、 K を大きくするにつれて $2\pi/0.5\pi \cdot T = 4T$ なる繰返しの振動に近づくことがわかる。すなわち、ループ一巡のゲイン K を横軸にとり、系の安定領域、不安定領域を図示すれば、図 6.21 のようになる。すなわち、この系は線形動作時においては $K=K_0=2.385$ に設定され、安定な有限整定時間応答特性を示すが、系に飽和が生

ずるとループ一巡の等価ゲインが $K=K_1$ なる $\ell T = 2T$ の不安定領域に近づき、遂に周期 $\ell T = 2T$ の乱調を生ずるものと説明することができる。かつ、この場合の振動の平衡

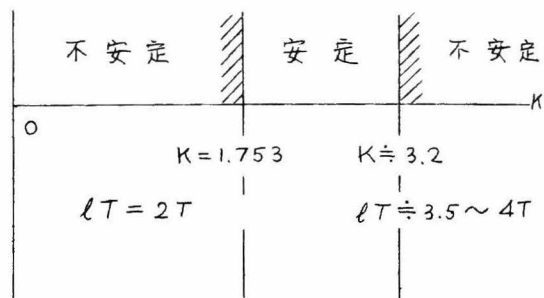


図 6.21 図 6.20 における K と安定不安定

点はさきに示した通り不安定であり、微小外乱により安定域に戻るかまたは不安定域に入る。不安定域に入れば $\ell T = 2T$ の交番振動の振幅が増大し、ゲイン K は飽和が深くなるため増々減少する。この場合、振動の原因となっている不安定根は、さきの根軌跡からわかるように、 s 平面における負の実軸 ($\theta = \pi$) 上を -1.778 (開ループ伝達関数の不安定極) に向かって移動するから、周期 $\ell T = 2T$ の振動の振幅は無限に増大するが、その繰返し周波数は $\ell T = 2T$ で不変である。このことはさきに 5.2.1 に示した通りである。(図 5.3 参照)

以上のような飽和による乱調発生に対する仮定が成立するものとすれば、非常にまれな場合とは考えられるが、開閉両ループ共安定であつても、その根軌跡が例えば図 6.22 に示すような形をしている場合には、

このような現象が起りうるのではないかと考えられる。

つぎに例題3においては、開ループ伝達関数 $HG^*(z)$ は安定であるが、開ループを構成すると、 $1 + HG^*(z) = 0$ が不安定根、すなわち $|z| > 1$ なる根を含むようになる発振回路である。この場合には、飽和特性のため無限大に発散する性質を有する線形振動の振幅がある一定値に押えられるようになり、安定な持続振動を呈するものと考えられる。

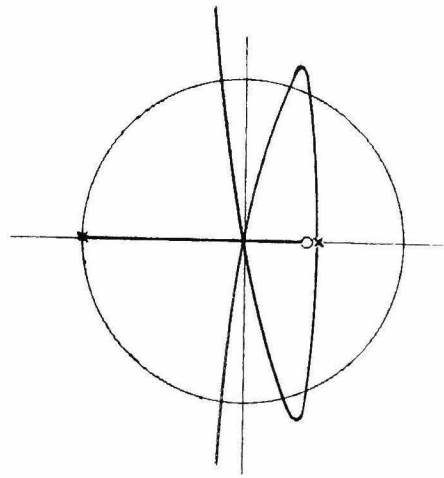


図 6.22. 飽和による乱調現象を発生する恐れのある系の根軌跡

6.6.4 サンプリング オンオフ制御系に対する適用例

つぎに非線形要素としてリレーを含むサンプル値系における振動問題を本解析法によりとりあつかってみる。

C.K. Chow は Contactor Servomechanisms employing Sampled Data なる表題の下に、図 6.23 に示すようなオン・オフ・サンプル値系に対し等価伝達関数法を適用することにより、サンプリング周期の整数倍の振動の有無を論じている。^{*}

その方法は、 $\ell=2, 3, 4, 5, 6, \dots$ なる個々の整数次振動毎にリレー要素の等価伝達関数を計算し、

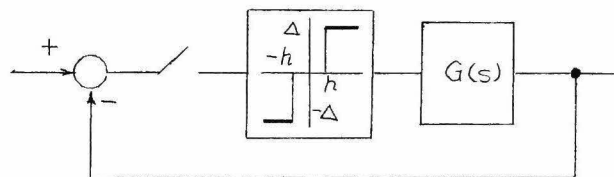


図 6.23 サンプリング・オンオフ制御系

^{*} C.K. Chow: Contactor Servomechanisms Employing Sampled Data, Trans. A.I.E.E. Part II, p. 51, 1954.

これを別々の複素ベクトル平面にえがき、(ℓ の値毎にその振動の存在領域をそれぞれ、ベクトル平面にえがく。) 線形伝達要素のベクトル軌跡 $G(j\omega)$ をそれぞれの平面上に重ねてえがくことにより、振動発生条件を満足するものがあるかどうかを ℓ の値毎にしらべるものである。

本章においてとり上げた方法もやはり、 ℓ の値を仮定し、その仮定に合致する平衡点が存在するかどうかをしらべるものであるが、前者がグラフ上で近似的に平衡点を求める方法であるのに反し、後者は解析的に求めるもので何等近似を含まない。

ここにリレー要素を含む系への本法の適用例として C. K. Chow が採用したのと同じ例題につき、両者の結果を比較してみる。

C. K. Chow は制御対象として

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad T=1 \text{ (サンプリング周期)} \quad (6.124)$$

なるサーボ系をえらび リレー要素の中立帯の巾と操作信号の比 $h/\Delta = 0.1$ (図 6.9 (b) 参照) としたとき、表 6.1 に示すような振動が予想されることを等価伝達関数法により求め、それをアナログ・コンピュータにより実証している。

	ℓ	δ	等価伝達関数法による 予測結果	アナログコンピュータによる 実測結果
1	4	1	存在を予測	実 在
2	4	2	"	"
3	5	2	"	"
4	6	3	"	"

表 6.1 C. K. Chow が行った図 6.23 の系における整数次振動の吟味*

* 本章における方法によれば、 $G(s)$ が積分特性を有する場合には、さきに述べた附帯条件 $\sum_{i=1}^{\ell} B_i = 0$ が成立し、その結果自動的に $\sum_{i=1}^{\ell} y_i = 0$ 、すなわち (リレー要素出力パルスの 1 周期に亘る代数和) = 0 の場合しか平衡条件が充されないことがわかる。 (頁 162 参照)。

なお、C. K. Chow は適用可能な制御対象として $G(s)$ が少くとも 1 個の積分性の極を有する場合に限定し、積分性要素出力にサンプリング周期 T の整数倍の振動が平衡するための条件として、リレー要素出力、すなわち積分性要素への操作入力の一周期に亘る積分が零となるものと仮定している。表における δ は整数次振動の一周期間における正(負)方向動作回数である。

さて、図 6.23 の系は図 6.24 のように表わしてもその動作に変りはない。図

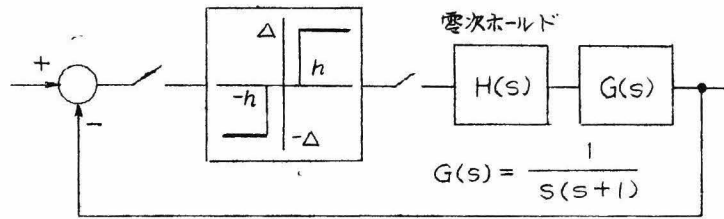


図 6.24. サンプリング・オンオフ・サーボ系

における線形伝達要素 $H(s) \times G(s)$ の z 変換はつぎのように表わされる。

$$Z[H(s)G(s)] = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (6.125)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-T} = 0.368, & b_1 &= -(1 + e^{-T}) = -1.368 \\ a_2 &= (1 - 2e^{-T}) = 0.264, & b_2 &= e^{-T} = 0.368 \end{aligned} \quad (6.126)$$

$G(s)$ は $s=0$ なる積分極を有する故に附帯条件として、その値如何を問わず、

$$B_1 + B_2 + \dots + B_\ell = 1 + b_1 + b_2 = 0 \quad (6.127)$$

が成立する。また図 6.9 (b) より明らかなように非線形特性が中立帯 h を含みリレーの場合には、

$$|x_k| < h \quad \text{のとき} \quad \alpha_k = 0 \quad (6.128)^*$$

$$x_k > h \quad \text{のとき} \quad \alpha_k x_k = \Delta$$

$$x_k < -h \quad \text{のとき} \quad \alpha_k x_k = -\Delta \quad (6.129)$$

と表わされる。したがって基本条件式 (6.14) は

* 理想的飽和特性のときには $|x_k| < \Delta$ のとき $\alpha_k = 1$ なることに注意

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_\ell \\ B_2 & B_3 & \cdots & B_1 \\ B_3 & B_4 & \cdots & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_\ell & B_1 & \cdots & B_{\ell-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_\ell \\ x_{\ell-1} \\ x_{\ell-2} \\ \vdots \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \\ f_3(A) \\ \vdots \\ f_\ell(A) \end{vmatrix} \Delta \quad (6.130)$$

すなわち

$$|B| |x_\ell| = |f(A)| \Delta \quad (6.130')$$

なる形となり、式(6.127)の附帯条件が存在する場合には、

$$\det |B| = 0 \quad (6.131)$$

であるから、 ℓ 個の式中独立なものは $\ell-1$ 個である*。したがって条件式の吟味は、 $x_1 \sim x_\ell$ のうち1個、例えば x_ℓ を既知として残り $x_1 \sim x_{\ell-1}$ を求め、仮定した平衡状態を満足する範囲内で x_ℓ を変化した場合 $x_1 \sim x_{\ell-1}$ のすべてが仮定した平衡状態を満足するものであるかどうか、あるいは逆に $x_1 \sim x_{\ell-1}$ を変化した場合、いずれを変化した場合でも x_ℓ が仮定した平衡状態において取るべき値であるかどうかを検討すればよい。これは以下に示す解析例よりわかるように、 ℓ 個の式がすべて独立な場合に比べ、決して平衡点の吟味をむづかしくするものではない。むしろ附帯条件式(6.127)が成立する場合には吟味すべき平衡状態の数は非常に少くなる。すなわち式(6.130)より、

$$f_1(A) + f_2(A) + \cdots + f_\ell(A) = 0$$

の満足されるような平衡状態についての吟味すればよい。ここに $f_1(A) \sim f_\ell(A)$ はいずれも $A_1 \sim A_\ell$ の一次結合で与えられるものであり、その結合方法は仮定した平衡状態により異なる。

(1) $\ell=2$ の場合：

$$\begin{aligned} A_1 &= a_0 + a_2 = 0.264, & B_1 &= 1 + b_2 = 1.368 \\ A_2 &= a_1 &= 0.368, & B_2 &= b_1 &= -1.368 \end{aligned} \quad (6.132)$$

仮定すべき平衡状態は図6.25に示す状態のみである。すなわち、

$$y_1 = \Delta, \quad y_2 = -\Delta \quad (\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta) \quad (6.133)$$

* 普通 $|B|$ の小行列式はゼロではない。

平衡条件式は

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 - A_2 \\ A_2 - A_1 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.134)$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} 1.368 & -1.368 \\ -1.368 & 1.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.104 \\ 0.104 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.135)$$

x_2 を既知として x_1 を求めれば

$$x_1 = 0.08\Delta + x_2 \quad (6.136)$$

ところが式(6.133)の平衡状態が存在するためには、

$$x_1 \geq h, \quad x_2 \leq -h \quad (6.137)$$

でなければならない。式(6.136), (6.137)より

$$x_2 \geq h - 0.08\Delta, \quad x_2 \leq -h \quad (6.138)$$

C. K. Chow の例題の場合のように、 $h = 0.1\Delta$ とえらんだときには、

$$x_2 \geq 0.02\Delta, \quad x_2 \leq -0.1\Delta \quad (6.139)$$

となり、C. K. Chow の結果(表 6.1)と同じく $l=2$ の整数次振動は存在しないことになる。この系で $l=2$ の振動の平衡点が存在するためには、式(6.138)より明らかなように、中立帯の巾 h が、

$$h \leq 0.04\Delta \quad (6.140)$$

なる場合である。

(2) $l=3$ の場合：

$$\begin{aligned} A_1 &= a_0 = 0, & B_1 &= 1 \\ A_2 &= a_1 = 0.368, & B_2 &= b_1 = -1.368 \\ A_3 &= a_2 = 0.264, & B_3 &= b_2 = 0.364 \end{aligned} \quad (6.141)$$

仮定すべき平衡状態は図 6.26 に示す

状態だけである。^{*}(脚註次頁) すなわち、

$$y_1 = \Delta, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\Delta \quad (\because \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 = 0, \alpha_3 x_3 = -\Delta) \quad (6.142)$$

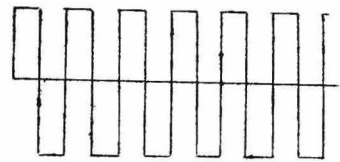


図 6.25 図 6.24 の系において可能な周期 $2T$ の平衡状態

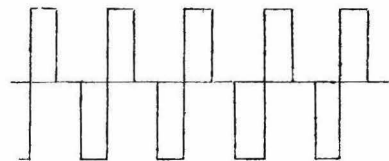


図 6.26 図 6.24 の系において可能な周期 $3T$ の平衡状態

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_1 \\ B_3 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 - A_3 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - A_2 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.143)$$

前2式をとり、 x_2 を既知としてとけば、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0.368 \\ -1.368 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.264 \\ 0.368 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} 1.368 \\ -0.368 \end{vmatrix} x_2 \quad (6.144)$$

$$x_3 = -0.26\Delta + x_2, \quad x_1 = 0.01\Delta + x_2 \quad (6.145)$$

ところが式(6.142)の平衡状態が存在するためには、

$$x_1 \geq h, \quad -h < x_2 < h, \quad x_3 \leq -h \quad (6.146)$$

でなければならない。式(6.145), (6.146)より、

$$x_2 \leq -h + 0.26\Delta, \quad x_2 \geq h - 0.01\Delta, \quad -h < x_2 < h \quad (6.147)$$

いま $h = 0.1\Delta$ であったとすると、

$$x_2 \leq 0.16\Delta, \quad x_2 \geq 0.09\Delta, \quad |x_2| < 0.1\Delta \quad (6.148)$$

となり、図 6.27 に示すように、

$$0.09\Delta \leq x_2 \leq 0.1\Delta \quad (6.149)$$

なる範囲であれば式(6.148)の条件がすべて満足される。したがって、図 6.26 に示すような振動の平衡点が存在する。^{*}(次頁) 図 6.28 はアナログコンピュータにより観測された $\ell=2$ の振動である。表 6.1 に示す K. Chow の与えた結果では $\ell=3$ の振動は存在しない。これは、その

(前頁*) たとえばつぎに示すような状態を仮定すれば、

$$y_1 = \Delta, y_2 = y_3 = -\Delta, \quad (\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = -\Delta)$$

したがって

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_1 \\ B_3 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 + A_2 - A_3 \\ A_2 + A_3 - A_1 \\ A_3 + A_1 - A_2 \end{vmatrix} \Delta$$

両辺それぞれの和を求めれば、

$$0 = (A_1 + A_2 + A_3)\Delta (= 0.632\Delta \neq 0)$$

すなわち、このような平衡点は存在しない。以下 $\ell=4, 5, 6, \dots$ の場合についてもホールド回路の出力の一周期に亘る積分 $\neq 0$ のものは吟味から除外できる。

方法が近似的方法であるためと思われる。図 6.29 は C. K. Chow の与えた $G(s) = 1/s(s+1)$ のベクトル軌跡と、 $\ell=3$ の振動平衡領域を示すもので、 $G(s)$ 軌跡上の $\ell=3$ の点 ($\omega = 2\pi/3T$) が領域内に存在するとき、その振動が予想される。この場合、 $\ell=3$ の点は領域外ではあるが非常に接近していることがわかる。

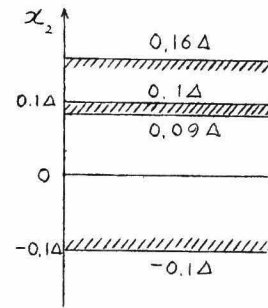


図 6.27 図 6.26 に示す $\ell=3$ の振動平衡状態の存在範囲

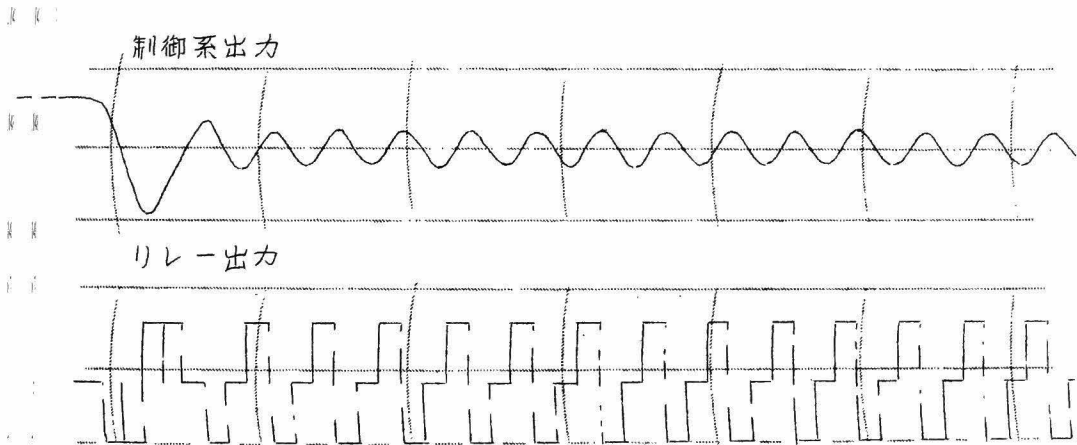


図 6.28 アナログ・コンピュータによる $\ell=3$ の振動の実例

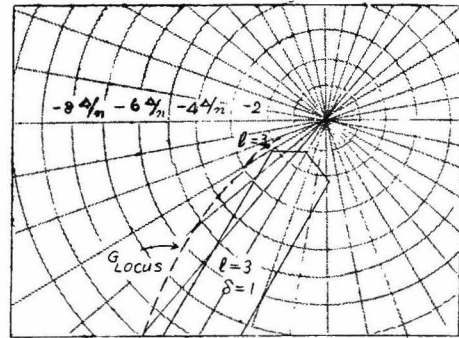
(3) $\ell=4$ の場合

$$\begin{aligned} A_1 = a_0 = 0, \quad B_1 = 1, \quad A_4 = 0 \\ A_2 = a_1 = 0.368, \quad B_2 = b_1 = -1.368, \quad B_4 = 0 \\ A_3 = a_2 = 0.264, \quad B_3 = b_2 = 0.368 \end{aligned} \quad (6.150)$$

* 解は式 (6.149) を満足する範囲内で無数に存在する。これは $G(s)$ が積分特性を含むため、 $G(s)$ 出力における振動の平均値 (直流分) はその振動が始まったときの初期値や、時々刻々加わる外乱により浮動するが、リレーの有する中立帯のため、少々浮動はリレー出力波に影響を与えないことを意味する。

図 6.29

$G(s) = 1/s(s+1)$ のベクトル軌跡と $\ell=3$ に対する Critical Region (平衡点存在領域)



仮定すべき平衡状態は図 6.30 に示す通りの場合である。

(a) $y_1 = \Delta, y_2 = -\Delta, y_3 = y_4 = 0$

($\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 x_2 = -\Delta$

$\alpha_3 = \alpha_4 = 0$) (6.151)

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_1 \\ B_3 & B_4 & B_1 & B_2 \\ B_4 & B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_3 - A_4 \\ A_4 - A_1 \\ A_1 - A_2 \\ A_2 - A_3 \end{vmatrix} \Delta$$

(6.152)

x_4 を既知として最初の 3 式より x_1, x_2, x_3 を求めれば、

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 \\ 0.368 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0.264 \\ 0 \\ -0.368 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \end{vmatrix} x_4$$

(6.153)

$$x_3 = -0.26\Delta + x_4$$

(6.154)

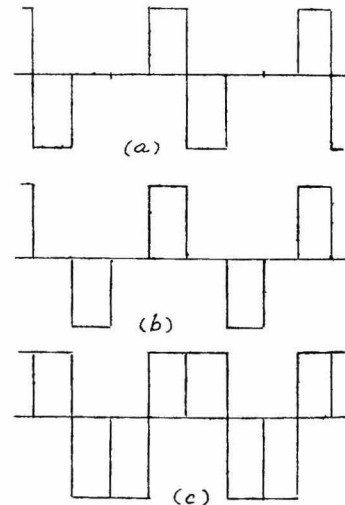


図 6.30 図 6.24 の系において可能な周期 $4T$ の平衡状態

ところが式(6.151)の平衡状態が存在するためには、

$$|x_3| < h, \quad |x_4| < h \quad (6.155)$$

でなければならない。 $h = 0.1\Delta$ とえらんだ場合には式(6.154)より、

$$x_4 < h + 0.26\Delta = 0.36\Delta, \quad x_4 > -h + 0.26\Delta = 0.16\Delta \quad (6.156)$$

すなわち式(6.156)の結果は式(6.155)と相いれず、 x_2, x_1 を求めるまでもなく、この平衡状態は存在しないことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} (b) \quad y_1 &= \Delta, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\Delta, \quad y_4 = 0 \\ (\therefore \alpha_1 x_1 &= \Delta, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta, \quad \alpha_4 = 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.157)$$

$$|B||X_4| = \begin{vmatrix} A_2 - A_4 \\ A_3 - A_1 \\ A_4 - A_2 \\ A_1 - A_3 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.158)$$

x_4 を既知として最初の3式より x_1, x_2, x_3 を求めれば、

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 \\ 0.368 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.368 \\ 0.264 \\ -0.368 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \end{vmatrix} x_4 \quad (6.159)$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -0.24\Delta + x_4 \\ x_2 &= 0.11\Delta + x_4 \\ x_1 &= 0.35\Delta + x_4 \end{aligned} \right\} \quad (6.160)$$

式(6.157)の仮定が成立するためには、

$$x_3 \leq -h, \quad |x_2| < h, \quad x_1 \geq h, \quad |x_4| < h \quad (6.161)$$

でなければならない。したがって $h = 0.1\Delta$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} x_4 &\leq -h + 0.24\Delta = 0.14\Delta \\ x_4 &< h - 0.11\Delta = -0.01\Delta \\ x_4 &> -h - 0.11\Delta = -0.21\Delta \\ x_4 &\geq h - 0.35\Delta = -0.25\Delta \\ x_4 &< h &= 0.1\Delta \\ x_4 &> -h &= -0.1\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.162)$$

すなわち図 6.31 より明らかなように

$$-0.1\Delta \leq x_4 \leq -0.01\Delta \quad (6.163)$$

の範囲で平衡条件が成立する。これは表 6.1 に示された $\ell=4$, $\delta=1$ なる振動である。図 6.32 はアナログ計算機を用いて観測された本振動現象である。

$$\left. \begin{aligned} (c) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = y_4 = -\Delta \\ (\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \\ \alpha_3 x_3 = \alpha_4 x_4 = -\Delta) \end{aligned} \right\} \quad (6.164)$$

$$|B||X_4| = \begin{vmatrix} A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \\ A_2 + A_3 - A_4 - A_1 \\ A_3 + A_4 - A_1 - A_2 \\ A_4 + A_1 - A_2 - A_3 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.165)$$

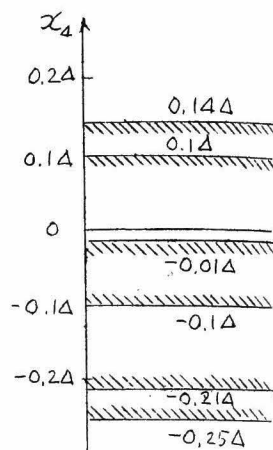
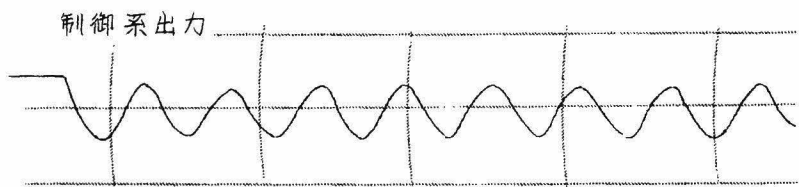


図 6.31 図 6.30 (b) は示す $\ell=4$ の振動平衡状態の存在範囲

やはり x_4 を既知として最初の 3 式より x_1, x_2, x_3 を求むれば、

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 \\ 0.368 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.104 \\ 0.632 \\ -0.104 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \end{vmatrix} x_4 \quad (6.166)$$



1) レー出力

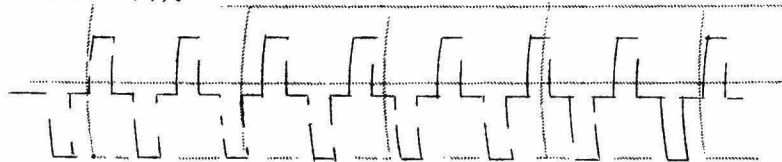


図 6.32 アナログコンピュータによる $\ell=4$, (b) の振動の实例

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -0.03\Delta + x_4 \\ x_2 &= 0.70\Delta + x_4 \\ x_1 &= 0.59\Delta + x_4 \end{aligned} \right\} \quad (6.167)$$

ところが式(6.164)の仮定が成立するためには、

$$x_1 \geq h, \quad x_2 \geq h, \quad x_3 \leq -h, \quad x_4 \leq -h \quad (6.168)$$

でなければならない。したがって $h = 0.1\Delta$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} x_4 &\leq -h + 0.03\Delta = -0.07\Delta \\ x_4 &\geq h - 0.70\Delta = -0.60\Delta \\ x_4 &\geq h - 0.59\Delta = -0.49\Delta \\ x_4 &\geq h &= -0.10\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.169)$$

すなわち図 6.33 より明らかなように、

$$-0.1\Delta \leq x_4 \leq -0.07\Delta \quad (6.170)$$

の範囲でこの振動の平衡点が存在する。これは表 6.1 に示された $\ell = 4, \delta = 2$ の場合にあたる。

図 6.34 はアナログ計算機により観測された本振動現象である。

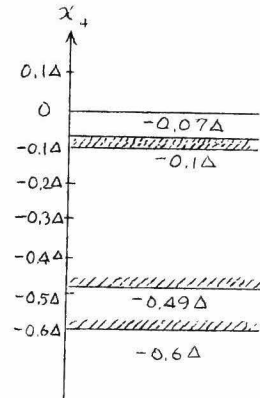


図 6.33 図 6.30(c) に示す $\ell = 4$ の振動平衡状態の存在範囲

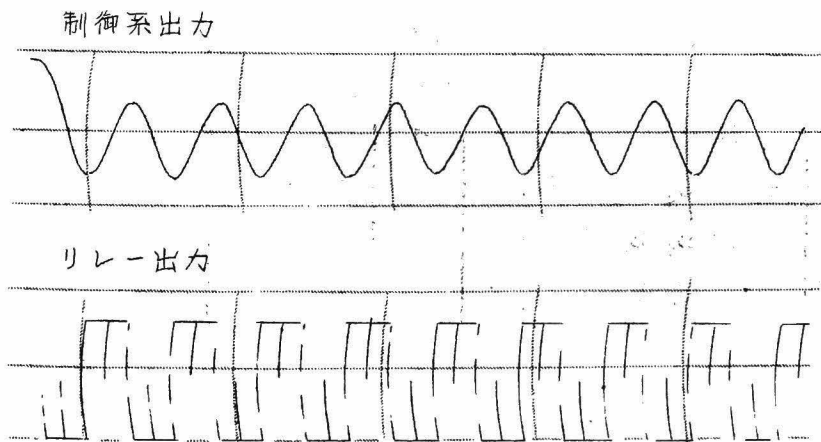


図 6.34 アナログ・コンピュータによる $\ell = 4(c)$ の振動の実例

(4) $\ell = 5$ の場合 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_0 = 0, & B_1 &= 1 \\ A_2 &= a_1 = 0.368, & B_2 &= b_1 = -1.368 \\ A_3 &= a_2 = 0.264, & B_3 &= b_2 = 0.368 \\ A_4 &= 0, & B_4 &= 0 \\ A_5 &= 0, & B_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.171)$$

仮定すべき平衡状態は図 6.35 に示す 4 通りである。

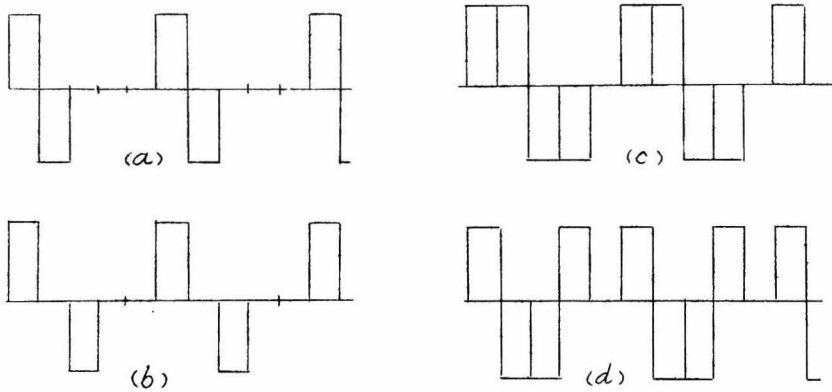


図 6.35 図 6.24 の系において可能な周期 5T の平衡状態

(a) $y_1 = \Delta, y_2 = -\Delta, y_3 = y_4 = y_5 = 0$

($\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \alpha_2 x_2 = -\Delta, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$) (6.172)

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_1 \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_1 & B_2 \\ B_4 & B_5 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_5 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_4 - A_5 \\ A_5 - A_1 \\ A_1 - A_2 \\ A_2 - A_3 \\ A_3 - A_4 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.173)^*$$

* ℓ の数が増加すると仮定すべき平衡状態の数、連立方程式の元が多くなり、吟味が非常に困難になるよう考えがちであるが、 $G(s)$ の次数があまり高くないときには、 B_i, A_i の多くのものが 0 となるためそれほど面倒にはならない。

x_5 を既知として最初の 4 式より $x_1 \sim x_4$ を求めれば、

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.368 \\ 0.107 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \end{vmatrix} x_5 \quad (6.174)$$

$$x_4 = -0.09\Delta + x_5, \quad x_3 = -0.34\Delta + x_5 \quad (6.175)$$

まずこの 2 根について吟味すると、式 (6.172) より

$$|x_4| < h, \quad |x_3| < h, \quad |x_5| < h \quad (6.176)$$

でなければならない。ところが式 (6.175) より $h = 0.1\Delta$ の場合には、

$$\left. \begin{aligned} x_5 &< h + 0.09\Delta = 0.19\Delta \\ x_5 &> -h + 0.09\Delta = -0.01\Delta \\ x_5 &< h + 0.34\Delta = 0.44\Delta \\ x_5 &> -h + 0.34\Delta = 0.24\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.177)$$

すなわち図 6.36 より明らかなように x_2, x_1 を求めるまでもなくこのような平衡状態は存在しないことは明らかである。

$$(b) \quad y_1 = \Delta, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\Delta, \quad y_4 = y_5 = 0$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta,$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = 0) \quad (6.178)$$

$$|B| |x_5| = \begin{vmatrix} A_3 - A_5 \\ A_4 - A_1 \\ A_5 - A_2 \\ A_1 - A_3 \\ A_2 - A_4 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.179)$$

x_5 を既知と考えて最初の 4 式をとり、 $x_1 \sim x_4$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.264 \\ 0 \\ -0.368 \\ -0.264 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \end{vmatrix} x_5 \quad (6.180)$$

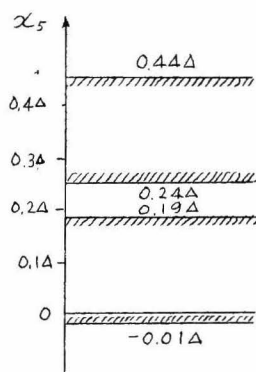


図 6.36 不等式 (6.177) の図式表現

$$x_4 = -0.35\Delta + x_5 \quad (6.181)$$

ところが式(6.178)の仮定が成立するには、やはり

$$|x_4| < h, \quad |x_5| < h \quad (6.182)$$

でなければならないが、 $h = 0.1\Delta$ の場合には、

$$\left. \begin{aligned} x_5 &< h + 0.35\Delta = 0.45\Delta \\ x_5 &> -h + 0.35\Delta = 0.25\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.183)$$

となり、式(6.182)の条件と相入れない。したがってこのような平衡点は存在しない。

$$(c) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = y_4 = -\Delta, \quad y_5 = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} &(\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \alpha_3 x_3 = \alpha_4 x_4 = -\Delta, \alpha_5 = 0) \end{aligned} \right. \quad (6.184)$$

$$|B||X_5| = \begin{vmatrix} A_2 + A_3 - A_4 - A_5 \\ A_3 + A_4 - A_5 - A_1 \\ A_4 + A_5 - A_1 - A_2 \\ A_5 + A_1 - A_2 - A_3 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.185)$$

x_5 を既知と考えて最初の4式より $x_1 \sim x_4$ を求めると、

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.632 & \Delta + \\ 0.264 & \\ -0.368 & \\ -0.632 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \end{vmatrix} x \quad (6.186)$$

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= -0.58\Delta + x_5 \\ x_3 &= -0.42\Delta + x_5 \\ x_2 &= 0.28\Delta + x_5 \\ x_1 &= 0.48\Delta + x_5 \end{aligned} \right\} \quad (6.187)$$

ところが式(6.184)の仮定が成立するためには

$$x_1 \geq h, \quad x_2 \geq h, \quad x_3 \leq -h, \quad x_4 \leq -h, \quad |x_5| < h \quad (6.188)$$

でなければならない。 $h = 0.1\Delta$ の場合には、式(6.187)より、

$$\begin{array}{lcl}
 (6.5) \quad (6.5) \quad (6.5) & x_5 \geq h - 0.48\Delta = -0.38\Delta & \\
 & x_5 \geq h - 0.28\Delta = -0.18\Delta & \\
 (6.5) \quad (6.5) & x_5 \leq -h + 0.42\Delta = 0.32\Delta & \\
 & x_5 \leq -h + 0.58\Delta = 0.48\Delta & \\
 (6.5) \quad (6.5) & x_5 < h & = 0.1\Delta \\
 & x_5 > -h & = -0.1\Delta
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_5 \geq h - 0.48\Delta \\ x_5 \geq h - 0.28\Delta \\ x_5 \leq -h + 0.42\Delta \\ x_5 \leq -h + 0.58\Delta \\ x_5 < h \\ x_5 > -h \end{array}} \right\} (6.189)$$

すなわち図 6.37 より明らかなように
 $h = 0.1\Delta$ の場合には、

$$-0.1\Delta \leq x_5 \leq 0.1\Delta \quad (6.190)$$

なる範囲でこの種振動の平衡点が存在する。図 6.38 はアナログ・コンピュータにより観測された本振動現象である。

$$(d) \quad y_1 = \Delta, \quad y_2 = y_3 = -\Delta, \quad y_4 = \Delta$$

$$y_5 = 0$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = -\Delta,$$

$$\alpha_4 x_4 = \Delta, \quad \alpha_5 = 0)$$

$$(6.191)$$

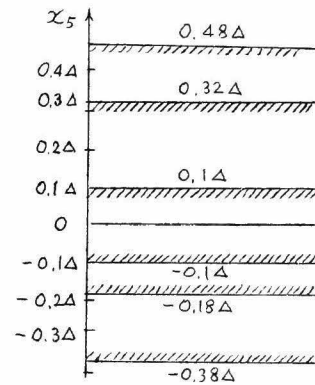


図 6.37 図 6.35(c) に示す $l=5$ の振動平衡状態の存在範囲

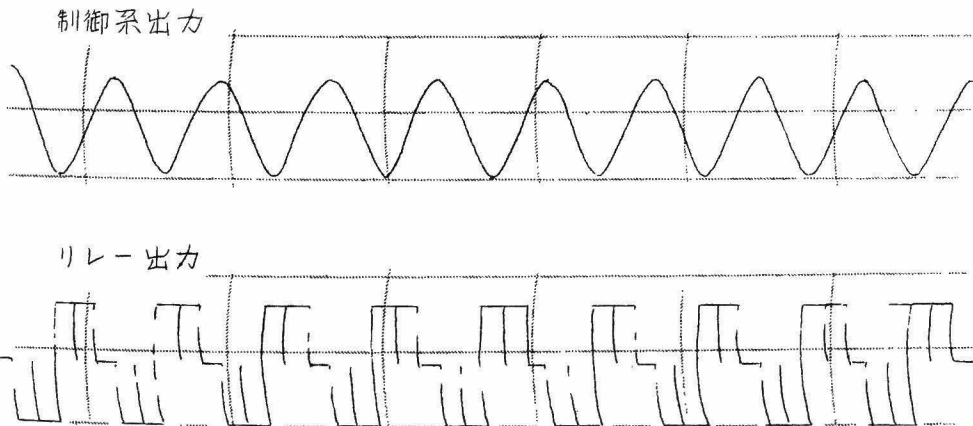


図 6.38 アナログ・コンピュータによる $l=5$ (c) の振動の実例

$$|B||x_5| = \begin{vmatrix} A_3 + A_4 - A_5 - A_2 \\ A_4 + A_5 - A_1 - A_3 \\ A_5 + A_1 - A_2 - A_4 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_5 \\ A_2 + A_3 - A_4 - A_1 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.192)$$

やはり x_5 を既知と考えて $x_1 \sim x_4$ の吟味を行う。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.104 \\ -0.264 \\ -0.368 \\ 0.104 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \end{vmatrix} x_5 \quad (6.193)$$

$$x_4 = -0.09 \Delta + x_5 \quad (6.194)$$

ところが式(6.191)より、

$$x_4 \geq h, |x_5| < h \quad (6.195)$$

でなければならないが、式(6.194)より $h = 0.1 \Delta$ の場合には、

$$x_5 \geq h + 0.09 \Delta = 0.19 \Delta \quad (6.196)$$

となり (6.195) と相入れない。したがってこのような平衡点は存在しない。

すなわち、 $l=5$ の振動の平衡点としては4通りの平衡状態のうち、ただ一通り、(c) の場合のみが存在可能である。これは Chow の与えた結果 表 6.1, $l=5$, $\delta=2$ の場合に相当する。

(5) $l=6$ の場合：

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_0 = 0, & B_1 &= 1 \\ A_2 &= a_1 = 0.368, & B_2 &= b_1 = -1.368 \\ A_3 &= a_2 = 0.264, & B_3 &= b_2 = 0.368 \\ A_4 &= 0, & B_4 &= 0 \\ A_5 &= 0, & B_5 &= 0 \\ A_6 &= 0, & B_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.197)$$

仮定すべき平衡状態は図 6.39 に示す8通りの場合である。

$$(a) \quad y_1 = \Delta, \quad y_2 = -\Delta, \quad y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 x_2 = -\Delta, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} y_1 = \Delta \\ y_2 = -\Delta \end{matrix}} \right\} (6.198)$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_1 \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_1 & B_2 \\ B_4 & B_5 & B_6 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_5 & B_6 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_5 - A_6 \\ A_6 - A_1 \\ A_1 - A_2 \\ A_2 - A_3 \\ A_3 - A_4 \\ A_4 - A_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{vmatrix} \quad (6.199)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.368 \\ 0.104 \\ 0.264 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta + \\ -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.200)$$

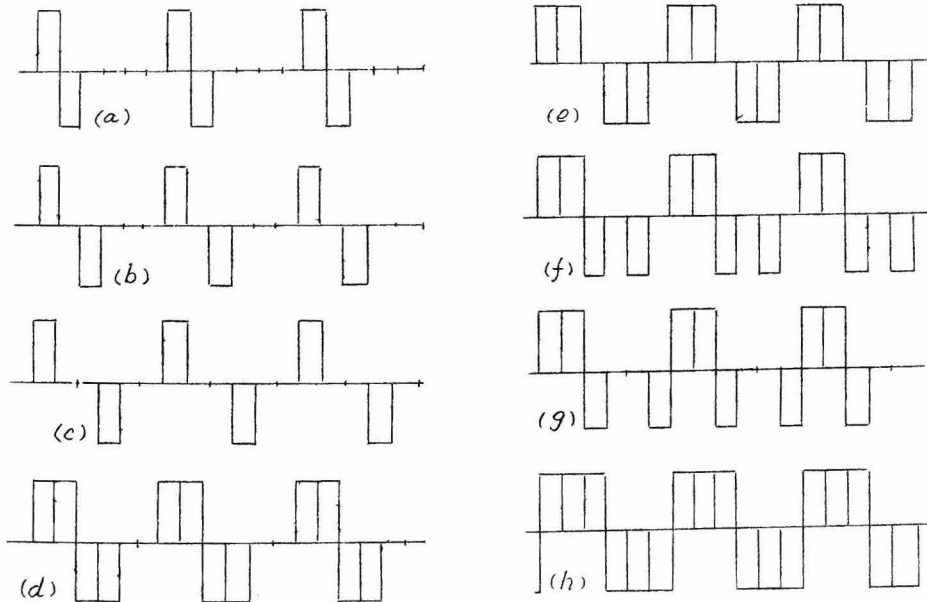


図 6.39 図 6.24 の系において可能な周期 $6T$ の平衡状態

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= -0.03\Delta + x_6 \\ x_4 &= -0.13\Delta + x_6 \\ x_3 &= -0.38\Delta + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (6.201)$$

式(6.198)より.

$$|x_5| < h, \quad |x_4| < h, \quad |x_3| < h, \quad |x_6| < h \quad (6.202)$$

でなければならない。 $h = 0.1\Delta$ とすれば.

$$\left. \begin{aligned} x_6 &< h + 0.03\Delta = 0.13\Delta \\ x_6 &> -h + 0.03\Delta = -0.07\Delta \\ x_6 &< h + 0.13\Delta = 0.23\Delta \\ x_6 &> -h + 0.13\Delta = 0.03\Delta \\ x_6 &< h + 0.38\Delta = 0.48\Delta \\ x_6 &> -h + 0.38\Delta = 0.28\Delta \\ x_6 &< h &= 0.1\Delta \\ x_6 &> -h &= 0.1\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.203)$$

x_2, x_1 を求めるまでもなくこのような平衡点が存在し得ないことは上式より明らかである。

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= \Delta, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\Delta, \quad y_4 = y_5 = y_6 = 0 \\ (\therefore \alpha_1 x_1 &= \Delta, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.204)$$

$$|B||x_6| = \begin{vmatrix} A_4 - A_6 \\ A_5 - A_1 \\ A_6 - A_2 \\ A_1 - A_3 \\ A_2 - A_4 \\ A_3 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.205)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.368 \\ -0.264 \\ 0.368 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.206)$$

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= -0.13\Delta + x_6 \\ x_4 &= -0.47\Delta + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (6.207)$$

ところが式(6.204)より

$$|x_5| < h, \quad |x_4| < h, \quad |x_6| < h \quad (6.208)$$

でなければならぬ。 $h = 0.1\Delta$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} x_6 &< h + 0.13\Delta = 0.23\Delta \\ x_6 &> -h + 0.13\Delta = 0.03\Delta \\ x_6 &< h + 0.47\Delta = 0.57\Delta \\ x_6 &> -h + 0.47\Delta = 0.37\Delta \\ x_6 &< h &= 0.1\Delta \\ x_6 &> -h &= -0.1\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.209)$$

x_3, x_2, x_1 の吟味を行なうまでもなく上式より、このような平衡点の存在しないことは明らかである。

$$(c) \quad y_1 = \Delta, \quad y_2 = y_3 = 0, \quad y_4 = -\Delta, \quad y_5 = y_6 = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y_1 &= \Delta, \quad y_2 = y_3 = 0, \quad y_4 = -\Delta, \quad y_5 = y_6 = 0 \end{aligned}} \right\} (6.210)$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \Delta, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 x_4 = -\Delta, \quad \alpha_5 = \alpha_6 = 0)$$

$$|B||x_6| = \begin{vmatrix} A_3 - A_6 \\ A_4 - A_1 \\ A_5 - A_2 \\ A_6 - A_3 \\ A_1 - A_4 \\ A_2 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.211)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.264 \\ 0 \\ -0.368 \\ -0.264 \\ 0 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.212)$$

$$x_5 = 0.37\Delta + x_6 \quad (6.213)$$

ところが式(6.210)より、

$$|x_5| < h, \quad |x_6| < h$$

でなければならない。 $h = 0.1\Delta$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} x_6 &< h - 0.37\Delta = -0.27\Delta \\ x_6 &> -h - 0.37\Delta = -0.47\Delta \\ x_6 &< h &= 0.1\Delta \\ x_6 &> -h &= -0.1\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.214)$$

すなわち、 x_4, x_3, x_2, x_1 の吟味を行うまでもなく、このような平衡点の存在しないことは明らかである。

$$\begin{aligned} (d) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = y_4 = -\Delta, \quad y_5 = y_6 = 0 \\ \therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 x_3 = \alpha_4 x_4 = -\Delta, \quad \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = y_4 = -\Delta, \quad y_5 = y_6 = 0 \\ \therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 x_3 = \alpha_4 x_4 = -\Delta, \quad \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \end{aligned}} \right\} (6.215)$$

$$|B||X_6| = \begin{vmatrix} A_3 + A_4 - A_5 - A_6 \\ A_4 + A_5 - A_6 - A_1 \\ A_5 + A_6 - A_1 - A_2 \\ A_6 + A_1 - A_2 - A_3 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \\ A_2 + A_3 - A_4 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.216)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.264 & \Delta + \\ 0 & \\ -0.368 & \\ -0.632 & \\ 0.104 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.217)$$

$$x_5 = -0.47 \Delta + x_6$$

$h = 0.1 \Delta$ の場合、上式は式 (6.215) の仮定を満足しないことは明らかである。したがってこのような平衡状態は存在しない。

$$\left. \begin{aligned} (e) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = y_5 = -\Delta, \quad y_6 = 0 \\ (\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 x_4 = \alpha_5 x_5 = -\Delta, \quad \alpha_6 = 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.218)$$

$$|B||x_6| = \begin{vmatrix} A_2 + A_3 - A_5 - A_6 \\ A_3 + A_4 - A_6 - A_1 \\ A_4 + A_5 - A_1 - A_2 \\ A_5 + A_6 - A_2 - A_3 \\ A_6 + A_1 - A_3 - A_4 \\ A_1 + A_2 - A_4 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.219)$$

x_6 を既知と考え、最初の 5 式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.632 & \Delta + \\ 0.264 & \\ -0.368 & \\ -0.632 & \\ -0.264 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.220)$$

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= -0.70 \Delta + x_6 \\ x_4 &= -0.87 \Delta + x_6 \\ x_3 &= -0.35 \Delta + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (6.221)$$

式 (6.218) より、

$$x_5 \leq -h, \quad x_4 \leq -h, \quad |x_3| < h, \quad |x_6| < h \quad (6.222)$$

式 (6.21) 第 3 式は $h = 0.1 \Delta$ とした場合、式 (6.222) の条件に合

致しない。したがって、このような平衡点は存在しない。

$$(f) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = -\Delta, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = -\Delta, \quad y_6 = 0$$

$$(\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \quad \alpha_3 x_3 = -\Delta, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 x_5 = -\Delta, \quad \alpha_6 = 0)$$

(6.223)

$$|B||X_6| = \begin{vmatrix} A_2 + A_4 - A_5 - A_6 \\ A_3 + A_5 - A_6 - A_1 \\ A_4 + A_6 - A_1 - A_2 \\ A_5 + A_1 - A_2 - A_3 \\ A_6 + A_2 - A_3 - A_4 \\ A_1 + A_3 - A_4 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.224)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.368 \\ 0.264 \\ -0.368 \\ -0.632 \\ 0.104 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.225)$$

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= -0.44\Delta + x_6 \\ x_4 &= -0.65\Delta + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (6.226)$$

式(6.223)より、

$$x_5 < -h, \quad |x_4| < h, \quad |x_6| < h \quad (6.227)$$

式(6.226) 第2式は $h=0.1\Delta$ とした場合、式(6.227)の条件に合致しない。したがって、このような平衡点は存在しない。

$$(g) \quad y_1 = y_2 = \Delta, \quad y_3 = -\Delta, \quad y_4 = y_5 = 0, \quad y_6 = -\Delta \quad \left. \begin{array}{l} \\ (\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \Delta, \alpha_3 x_3 = -\Delta, \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \alpha_6 x_6 = -\Delta) \end{array} \right\} (6.228)$$

$$|B||X_6| = \begin{vmatrix} A_1 + A_4 - A_5 - A_6 \\ A_2 + A_5 - A_6 - A_1 \\ A_3 + A_6 - A_1 - A_2 \\ A_4 + A_1 - A_2 - A_3 \\ A_5 + A_2 - A_3 - A_4 \\ A_6 + A_3 - A_4 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.229)$$

x_6 を既知と考え 最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.368 \\ -0.104 \\ -0.632 \\ 0.104 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta + \\ -1 \\ 1.368 \\ 0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.230)$$

$$x_5 = -0.08\Delta + x_6 \quad (6.231)$$

式 (6.229) より、

$$|x_5| < h, \quad x_6 < -h \quad (6.232)$$

式 (6.231) は $h = 0.1\Delta$ とした場合、式 (6.232) の条件に合致しない。したがって、このような平衡点は存在しない。

$$(h) \quad y_1 = y_2 = y_3 = \Delta, \quad y_4 = y_5 = y_6 = -\Delta \quad \left. \begin{array}{l} \\ (\therefore \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_3 = \Delta, \alpha_4 x_4 = \alpha_5 x_5 = \alpha_6 x_6 = -\Delta) \end{array} \right\} \quad (6.233)$$

$$|B||X_6| = \begin{vmatrix} A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 - A_6 \\ A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_6 - A_1 \\ A_3 + A_4 + A_5 - A_6 - A_1 - A_2 \\ A_4 + A_5 + A_6 - A_1 - A_2 - A_3 \\ A_5 + A_6 + A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \\ A_6 + A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 \end{vmatrix} \Delta \quad (6.234)$$

x_6 を既知と考え、最初の5式より $x_1 \sim x_5$ を求める。

$$\begin{vmatrix} -1.368 & 0.368 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.368 \\ 0 & 0 & 1 & -1.368 & 0.368 \\ 0 & 1 & -1.368 & 0.368 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.632 \\ 0.632 \\ -0.104 \\ -0.632 \\ -0.632 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} -1 \\ 1.368 \\ -0.368 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} x_6 \quad (6.235)$$

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= -0.56\Delta + x_6 \\ x_4 &= -0.35\Delta + x_6 \\ x_3 &= 0.48\Delta + x_6 \\ x_2 &= 1.04\Delta + x_6 \\ x_1 &= 0.84\Delta + x_6 \end{aligned} \right\} \quad (6.236)$$

式(6.234)より $x_1 \sim x_6$ は

$$x_1 \geq h, \quad x_2 \geq h, \quad x_3 \geq h, \quad x_4 \leq -h, \quad x_5 \leq -h, \quad x_6 \leq -h \quad (6.237)$$

式(6.236)において $h=0.1\Delta$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} x_6 &\geq h - 0.84\Delta = -0.74\Delta \\ x_6 &\geq h - 1.04\Delta = -0.94\Delta \\ x_6 &\geq h - 0.48\Delta = -0.38\Delta \\ x_6 &\leq -h + 0.35\Delta = 0.25\Delta \\ x_6 &\leq -h + 0.56\Delta = 0.46\Delta \\ x_6 &\leq -h = -0.1\Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.238)$$

すなわち、図 6.40 より明らかなように、 $h=0.1\Delta$ の場合には、

$$-0.1\Delta \geq x_6 \geq -0.38\Delta \quad (6.239)$$

で、この種振動の平衡点が存在する。図 6.41 はアナログ・コンピュータにより観測された本振動現象である。

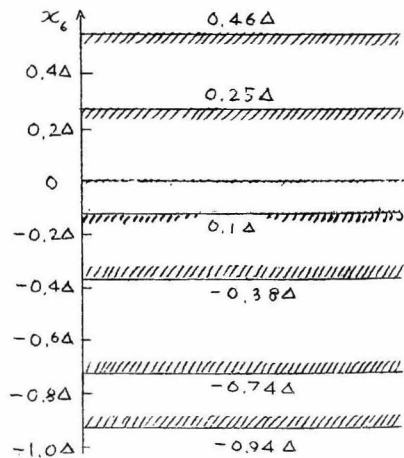


図 6.40 図 6.39(h) に示す $\ell=6$ の振動平衡状態の存在範囲

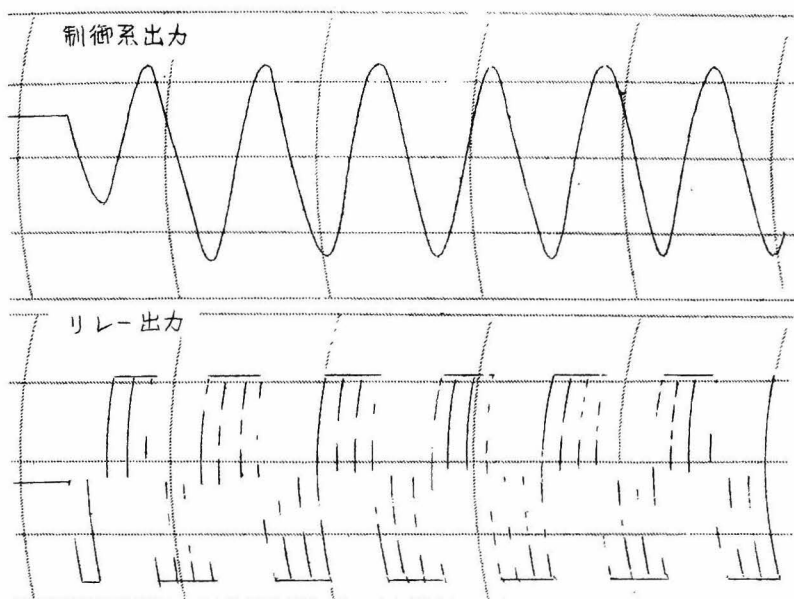


図 6.41 アナログコンピュータによる $\ell=6(k)$ の振動の実例

すなわち $\ell=6$ の振動の平衡点としては考えられる 8 通りの状態のうち、最も単純な図 6.39(k) の場合のみが起こり得ることになる。これは Chow の与えた結果、表 6.1 $\ell=6$, $\delta=3$ の場合に相当する。

さて、以上の検討により $\ell \leq 6$ までの整数次振動平衡点の有無の判定は何等の近似を含まず正確に行なうことができた。ところが与えられた系は何等かの整数次非線形振動が存在するか否かを判定するためには、 ℓ のすべての値について上記のような吟味を行なわねばならぬが、これはもとより不可能である。しかしながら線形要素 $G(s)$ が十分高域減衰の特性を持っており、生起する振動が単一周波数と近似できる場合、 ℓ の値が大きくなるにつれて、リレー入出力はその基本波成分のみについて考えれば、中立帯んの値にはほとんど無関係に同相と考えることができ、連続系におけると同様に等価伝達関数法が容易にかつ、相当大きな精度をもって適用できるものと考えられる。

C. K. Chow は先に述べた等価伝達関数法を用いて $\ell=2, 3, \dots$ なる整数次振動の平衡点を吟味するにあたって、 $G(s)$ が少なくとも 1 個

の積分極をもつ場合、振動の1周期におけるリレーの正の動作回数と負の動作回数が等しいことを指摘し、* かつその場合、連続偏差信号 制御量等は正負対称な波形になると考え、吟味すべき平衡状態としては、

$\ell = 2$ のとき 図 6. 25

$\ell = 3$ のとき 図 6. 26

$\ell = 4$ のとき 図 6. 30 (a)(b)(c)

$\ell = 5$ のとき 図 6. 35 (a)(b)(c)

$\ell = 6$ のとき 図 6. 39 (a)(b)(c)(d)(h)

のみを考え、それぞれの場合につき、リレー要素の等価伝達関数をベクトル表示したグラフを作成しているが、** リレーの正の動作回数と負の動作回数とか等しくとも、必ずしも連続信号は正負対称にはならない。(例えば図 6. 35(d) の場合) もっとも、この場合、その振動は正弦波で近似できるものではなく、等価伝達関数法は適用できない。

つぎに以上の平衡点の安定問題を考えるに、非線形要素がリレーの場合には、 $x_k = \pm h$ の場合を除いては $\xi_k = 0$ である。したがって 6. 5 に述べたことから振動の平衡点の安定問題は、開ループ伝達関数 $G(s)$ が安定要素であるか不安定要素であるかにより決まることになる。ここにとり上げた例では $G(s)$ の有する極は $s=0$, $s=-1$ で積分性を有し、平衡点は一極の安定限界にあると言える。すなわち、振動発生以後外乱その他の影響がなく、振動の平均値(直流分)に変化がなければ一応その振動は安定に持続する。しかし、アナログ・コンピュータによる模擬演算の場合のように、演算回路にドリフトなどの影響があると振動の平均値が時間的に変化し、ついにその平衡状態が成立しない値に達すると振動の種類(ℓ , δ の値)が突然変化することが考えられる。

これは上記アナログ・コンピュータによる演算中、しばしば見られた

* 本仮定は P 150 に述べたことにより、 $G(s)$ が積分極を有する場合には必ず成立する。

** C. K. Chow は $\ell = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ の場合に対し、図 6. 29 のような平衡点存在領域を求めている。

現象で、図 6.42 はその 1 例を示す。図においては $\ell=6$, $\delta=3$ の振動から $\ell=5$, $\delta=2$ の振動への移行が起こっている。

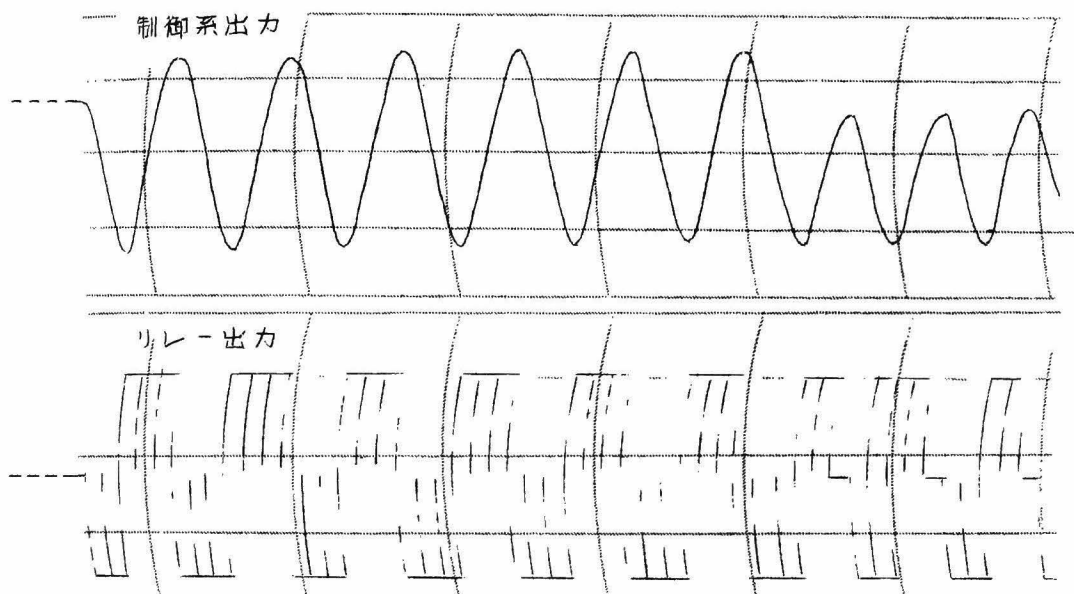


図 6.42 図 6.24 の系に見られる $\ell=6$ から $\ell=5$ の振動への移行

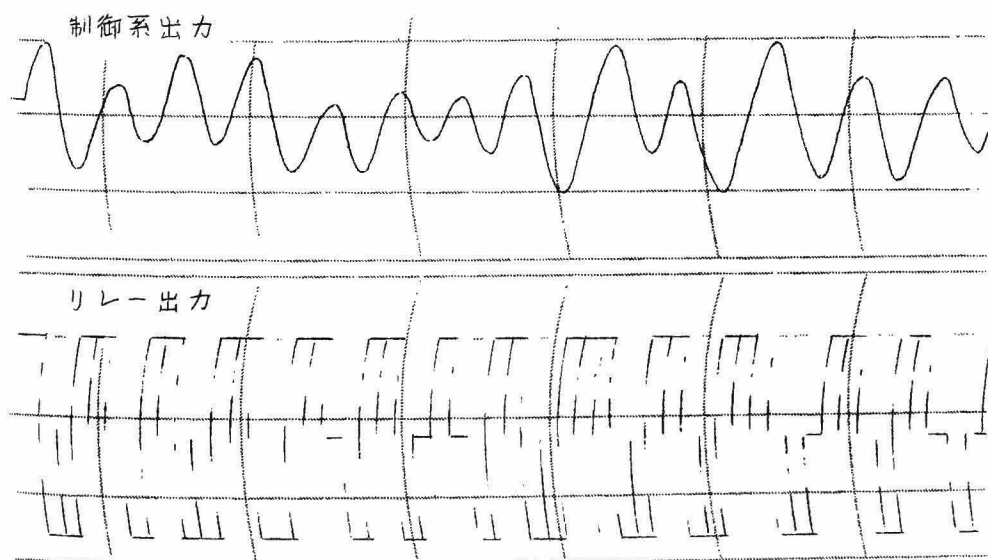


図 6.43 図 6.24 の系に見られる非整数次振動

$x_k = \pm n$ のときには図 6.9 (b) より明らかなように仮に $G(s)$ が安定であってもしレー入力 x_k に対応する出力は外乱の影響で $\pm\Delta$ と 0 の値を不規則にとることになり、図 6.42 に示された振動の移行が不規則に繰返し行なわれることになる。これは図 6.45 に示すような非整数次不規則振動の原因の一つではないかと考えられる。

第7章 サンプル値系に対する等価伝達関数法の適用

7.1 サンプル値系における等価伝達関数の特異性

非線形振動の解析法のうち、手軽に用いられてしかも相当効果のある解析法に等価伝達関数法がある。等価伝達関数法は取り扱う信号をすべて正弦波と仮定し、定常状態を論ずるものであるため、ナイキスト線図等で持続振動の有無、振巾の概略値、振動基本周波数等の推定は可能であるが、現実の波形や非線形振動発生条件と初期条件との関係、過渡応答に関する知識を得ることはほとんど不可能である。また等価伝達関数法を適用して十分信頼できる結果を得るためには系が高減衰の特性を有するものであること等、適用上の吟味が必要である。

非線形要素を含むサンプル値制御系についてこの問題を考えてみるに、非線形要素の等価伝達関数を導くにあたっては、飽和・リレー・バックラッシュといった空間的な非線形特性の他、サンプリング動作に基づく時間的な非線形性に注目しなければならない。すなわちサンプリング動作により発生する附帯高調波成分を、等価伝達関数を求める際、考へよめる必要がある。このことは等価伝達関数法をサンプル値系に適用するにあたっては、サンプリング周期に対する非線形振動の周期の比率によりサンプリング機構の取り扱いを変えなければならないことを意味する。

本章では非線形要素として理想的飽和特性を有する図 7.1 にしめす基本的なサンプル値系に対し等価伝達関数法を適用するに当って、各々相

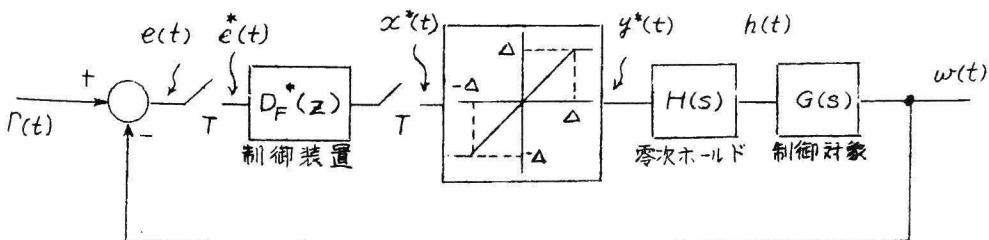


図 7.1 理想的飽和特性を有するサンプル値制御系

異なるサンプリング機構の取り扱い方を3つの方法について説明する。

7.2 非線形振動の周波数がサンプリング周波数に比べ小さい場合、— その1 (制御装置出力パルス列包絡線の連続波形に対し、等価伝達関数を定義する方法)

7.2.1 制御系目標値入力の定常値が零の場合*

図 7.1 より連続偏差出力 $e(t)$ は、

$$e(t) = r(t) - w(t) \quad (7.1)$$

ここに $r(t)$, $w(t)$ は目標値入力および制御系出力である。偏差 $e(t)$ のサンプル値パルス列 $e^*(t)$ は、

$$e^*(t) = \begin{cases} e(t), & t=0, 1, 2, \dots \quad \text{整数} \\ 0, & \text{非整数} \end{cases} \quad (7.2)$$

制御装置 $D_F^*(z)$ の出力パルス列を $x^*(t)$ とすれば飽和要素出力パルス列 $y^*(t)$ は、

$$y^*(t) = \begin{cases} \Delta & ; x^*(t) > 0 \text{ の場合} \\ x^*(t) & ; -\Delta \leq x^*(t) \leq \Delta \text{ の場合} \\ -\Delta & ; x^*(t) < -\Delta \text{ の場合} \end{cases} \quad (7.3)$$

零次ホールド $H(s)$ の出力を $h(t)$ とすれば、

$$h(t) = y_k = y(k-1)T, \quad (k-1)T \leq t \leq kT \quad (7.4)$$

制御系出力 $w(t)$ と $h(t)$ との間にはつぎの微分方程式が成立する。

$$\left[1/G(d/dt) \right] w(t) = h(t) \quad (7.5)$$

いまもし、制御系出力 $w(t)$ が周期 T_0 の周期関数であるとするとな上の関係式から $h(t)$ もやはり周期 T_0 の周期関数となる。

ここで $w(t)$ を

$$w(t) = W \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 \quad (7.6)$$

なる正弦波関数と仮定すれば、目標値入力 $r(t)$ の定常値が零の場合には、制御装置出力パルス列 $x^*(t)$ は定常状態においてはつぎのように表

* $G(s)$ が積分特性を有すると否とにかかわらず飽和は対象(正負)になる。

わされる。

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= -W |D_F^*(e^{j\omega_0 T})| \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \angle D_F^*(e^{j\omega_0 T})] \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \\
 &\equiv X \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (7.7)^*
 \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 X &= W |D_F^*(e^{j\omega_0 T})|, \quad \varphi_x = \varphi_0 + \angle D_F^*(e^{j\omega_0 T}) \\
 D_F^*(e^{j\omega_0 T}) &= D_F^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0 T}}
 \end{aligned} \right\} (7.8)$$

式(7.6)、(7.7)の関係を図示すれば図7.2のようになり、制御装置出力、したがって飽和要素入力パルス列 $x^*(t)$ は $X \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ なる連続正弦波を $t=0, T, 2T, \dots$ 毎にパルスサンプリングしたものに等しい。

$T_0 \gg T$ 、すなわち振動の角周波数 ω_0 がサンプリング角周波数 ω_s ($=2\pi/T$)に比べて十分ゆるやかな場合には、図7.2(c)に示すように、 $X \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ に対する飽和要素出力波形の基本波成分(ω_0 成分)を $t=0, T, 2T, \dots$ 毎にパルスサンプリングして得られるパルス列を飽和要素出力パルス列 $y^*(t)$ に等しいと近似できる。すなわち、

$$y^*(t) = Z[N(X)X \sin(\omega_0 t + \varphi_x)] \quad (7.9)$$

すなわちこの場合、等価伝達関数 $N(X)$ は飽和要素入力パルス列 $x^*(t)$ の正弦

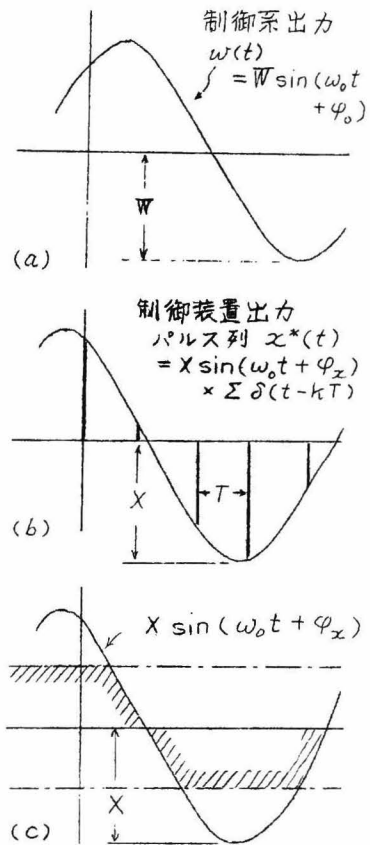


図7.2 $\omega_s \gg \omega_0$ の場合の
等価伝達関数法 その1

波状包絡線に対して定義されたものであり、連続系におけるものと何等変るところなく、つぎの式で与えられる。

$$N(X) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{\Delta}{|X|} + \frac{\Delta}{|X|} \cos \left(\sin^{-1} \frac{\Delta}{|X|} \right) \right] \quad (7.10)$$

平衡条件は明らかにつぎのように表わされる。

$$HG^*(e^{j\omega_0 T}) D_F^*(e^{j\omega_0 T}) = -\frac{1}{N(X)} \quad (7.11)$$

ここに、

$$HG^*(e^{j\omega_0 T}) = Z[H(s)G(s)] \Big|_{z=e^{j\omega_0 T}} \quad (7.12)$$

7.2 2 制御系目標値入力の定常値が一定値 r である場合*

(1) $D_F^*(z)$ が $z=1$ なる極を有する場合

制御装置の z 変換 $D_F^*(z)$ が $z=1$ なる極を有する場合は、有限整定応答用制御装置等において見られ、 $D_F^*(z)$ が積分特性を有することを意味する。

いま、制御系出力 $w(t)$ の定常直流成分を r_0 、 $D_F^*(z)$ 出力パルス列 $x^*(t)$ の定常直流成分を r_1 とすれば、容易に想像されるように、 r_1 が有限の値をとるためには、

$$r = r_0 \quad (7.13)$$

でなければならない。また飽和要素出力パルス列 $y^*(t)$ の定常直流成分を r_2 とすれば最終値定理より、

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{r_2}{(1-z^{-1})} HG^*(z) = r \quad (7.14)$$

すなわち

$$r_2 = \frac{r}{HG^*(z)|_{z=1}} \quad (7.15)$$

図 7.3 に示すように、定常直流成分 r_1 を伴った振巾 X の正弦波形が飽和値 Δ 、線形部分のゲイン 1 の理想的飽和要素に加えられた場合、飽

* $G(s)$ が積分特性を持たないときには非対象飽和となる。式 (7.15) 参照。

和要素出力に現われる直流成分、入力正弦波成分の振巾はそれぞれ、 $N_0(X, r_1)$, $N_1(X, r_1)X$ で表わされるものとする。 $N_0(X, r_1)$ は飽和要素出力の直流成分（飽和要素出力パルス列 $y^*(t)$ の包絡線の直流分）そのものを表わすが、 $N_1(X, r_1)$ は正弦波振動成分に対する飽和要素の等価伝達関数であり、各々つぎの関係で与えられる。

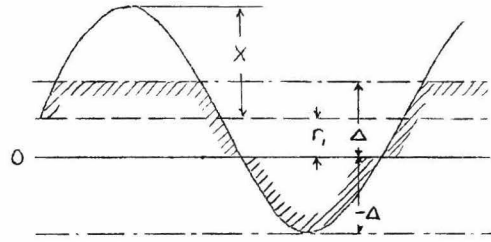


図 7.3 非対象飽和

$$\left. \begin{aligned} N_0(X, r_1) &= \frac{X}{\pi \Delta} (\alpha_2 \sin \alpha_2 - \alpha_1 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ N_1(X, r_1) &= \frac{1}{\pi} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha_1 &= \sin^{-1} \frac{\Delta - r_1}{X}, \quad \alpha_2 = \sin^{-1} \frac{\Delta + r_1}{X} \end{aligned} \right\} (7.16)$$

図 7.5, 7.6 は $N_0(X, r_1)$, $N_1(X, r_1)$ を r_1 を媒介変数とし、 X に対してえがたいものである。

平衡条件はこの場合、直流成分、基本正弦波成分の両者について考えられ、各々つぎの関係式で表わされる。すなわち、

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) N_0(X, r_1) \frac{1}{(1 - z^{-1})} H G^*(z) = r$$

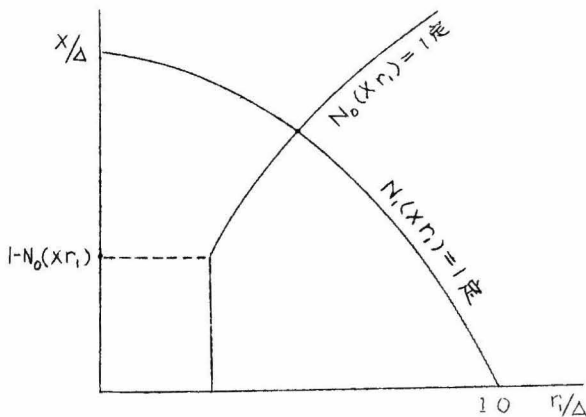


図 7.4 非対象飽和の場合の平衡点決定法
($D_F^*(z)$ が積分極を有するとき)

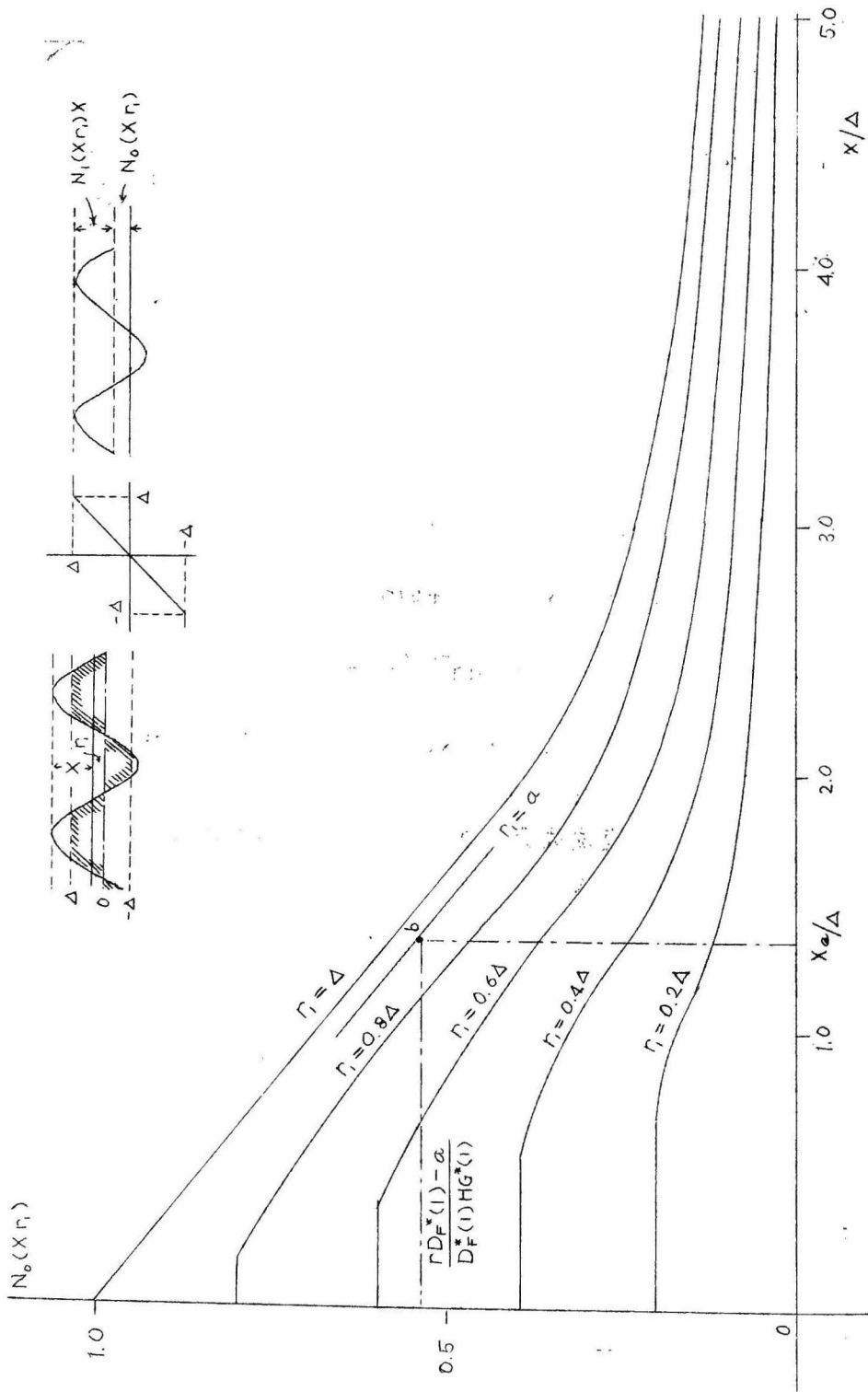


図 7.5 非対称飽和の場合における飽和要素直流成分

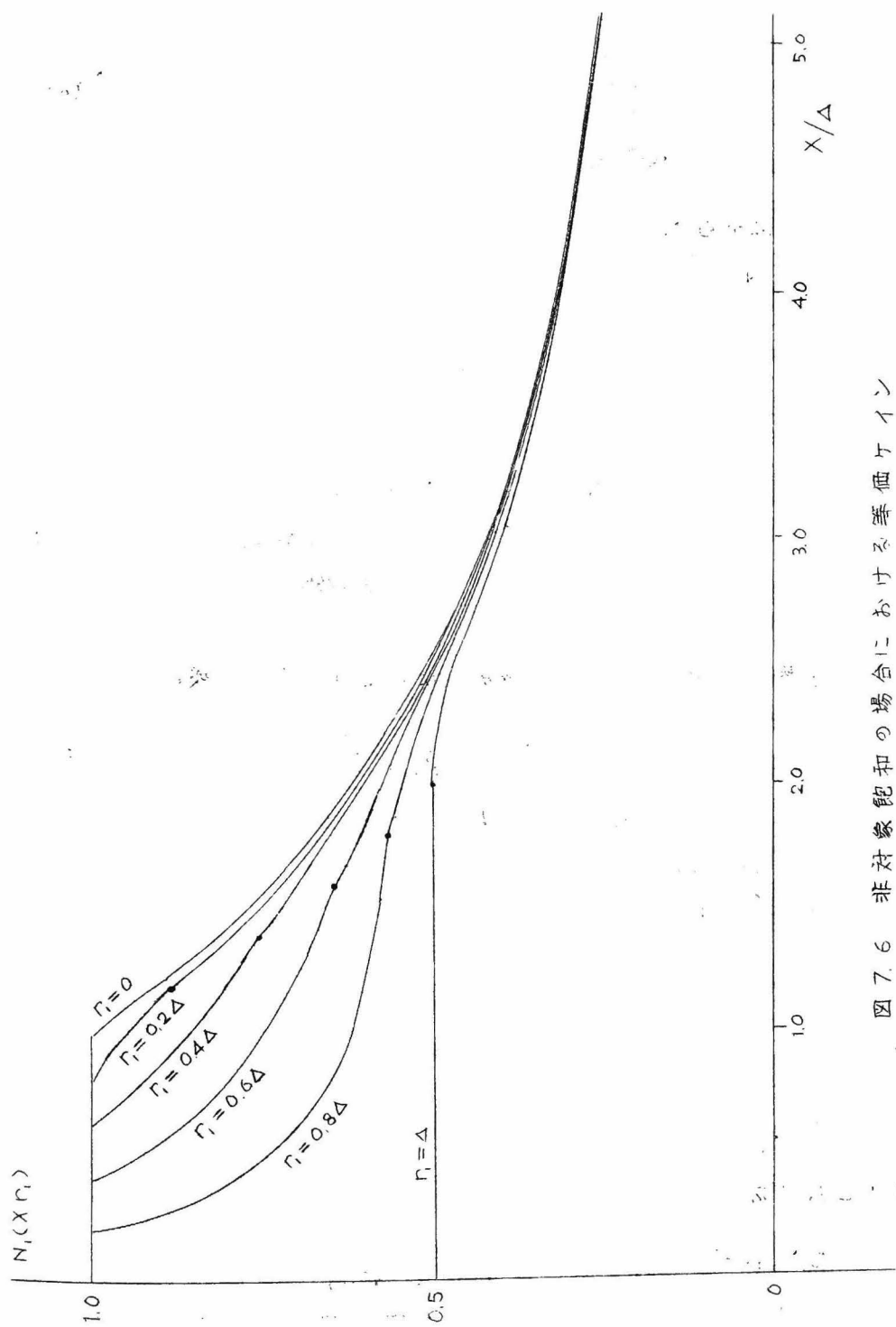


図 7.6 非対象飽和の場合における等価ケイン

すなわち

$$\left. \begin{aligned} N_o(X, r_1) &= \frac{r}{HG^*(1)} & \text{ここに } HG^*(1) = HG^*(z)|_{z=1} \\ D_F^*(e^{j\omega_o T}) HG^*(e^{j\omega_o T}) &= -\frac{1}{N_i(X, r_1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.17)^*$$

簡単な計算から $N_o(X, r_1)$ が、また連続系の場合と同じくベクトル平面解析から $N_i(X, r_1)$ の値が決まれば、それらの値を満足する r_1 と X の関係を図 7.5, 7.6 より読取り、図 7.4 に示すような作図を行ない、両者の交点より式 (7.17) の両平衡条件を満足するところの r_1, X の値を決定する。

(2) $D_F^*(z)$ が $z=1$ なる極を含まない場合

この場合、制御対象 $G(s)$ が積分特性を含む場合を除き、一般に制御系出力の定常直流成分 r_o は目標値の直流成分 r に一致しない。すなわちオフ・セットを伴う。

飽和要素入出力における直流成分に関しては (1) と同様にして、

$$r_2 = \frac{r_o}{HG^*(1)} = N_o(X, r_1) \quad (7.18)$$

また飽和要素入力 (制御装置出力) における直流成分 r_1 は、

$$r_1 = (r - r_o) D_F^*(1), \quad \text{ここに } D_F^*(1) = D_F^*(z)|_{z=1} \quad (7.19)$$

したがって r_o は

$$r_o = \frac{r D_F^*(1) - r_1}{D_F^*(1)} \quad (7.20)$$

直流成分に対する平衡条件は、

$$\frac{r D_F^*(1) - r_1}{D_F^*(1) HG^*(1)} = N_o(X, r_1) \quad (7.21)$$

基本正弦波成分に関しては式 (7.17) と同じく、

$$D_F^*(e^{j\omega_o T}) HG^*(e^{j\omega_o T}) = -\frac{1}{N_i(X, r_1)} \quad (7.22)$$

* $G(s)$ が積分性の極を有する場合には $H^*G(1) = \infty$, $\therefore N_o(X, r_1) = 0$

で与えられる。この場合も(1)の場合と同様にし
て $N_0(X, r_1)$, $N_1(X, r_1)$
の交点より r_1, X を求め
るのであるが、図 7.4
の $N_0(X, r_1) = \text{一定}$ に
対応する軌跡はつぎのよ
うにしてえがく。すなわ
ち、 r_1 として任意の値
 $r_1 = a$ をえらび、

$$N_0(X, a) = \frac{r D_F^*(1) - a}{D_F^*(1) H G^*(1)}$$

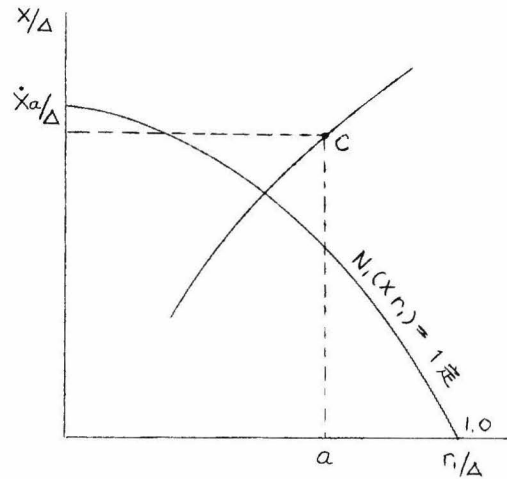


図 7.7 非対象飽和の場合の平衡点
決定法
($D_F^*(z)$ が積分極を持たない
とき)

を計算し、図 7.5 の縦軸の $N_0(X, r_1) = N_0(X, a)$ に対応する点より
横軸に平行線を引き、 $r_1 = a$ に対する $N_0(X, r_1)$ の軌跡との交点 b にお
ける X の値 X_a を読みとり 図 7.7 に示すように $N_0(X_a, a)$ に対応
する点 C を決める。 r_1 のいくつかの値について同じ手法を繰返し、図
7.4 と同じようなグラフを作成し、 $N_1(X, r_1)$ との交点より、平衡点
における r_1, X を求めることができる。

7.3 非線形振動の周波数がサンプリング周波数に比 べ十分小さい場合 — その 2 (ホールド回路出力 階段状波形の基本波成分に対し等価伝達関数を 定義する方法)

本節における解析においては図 7.1 における飽和要素と零次ホー
ルド回路との順序を入れ替え、図 7.8 に示すような回路について考える。
このように考えても現象の評価に変化はない。

7.3.1 制御系目標値入力の定常値が零の場合*

偏差 $e(t)$ の z 変換を $E^*(z)$ とすれば、制御装置出力パルス列 $x^*(t)$ の z 変換 $X^*(z)$ は $X^*(z) = D_F^*(z) E^*(z)$ で表わされる。 $X^*(z)$ をラプラス演算子 s の関数として表わせば、 $z = e^{sT}$ なる置換えにより、

$$X^*(e^{sT}) = D_F^*(e^{sT}) E^*(e^{sT}) \quad (7.23)$$

したがって、零次ホールド $H(s) = (1 - e^{-sT})/s$ の連続階段状出力 $x_h(t)$ のラプラス変換、 $X_h(s)$ は、

$$X_h(s) = H(s) D_F^*(e^{sT}) E^*(e^{sT}) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} D_F^*(e^{sT}) E^*(e^{sT}) \quad (7.24)$$

いま、制御系出力 $w(t)$ の定常値を式(7.6)の場合と同様、 $w(t) = W \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ とすれば、自励振動の場合、 $e(t) = -w(t)$ であるから、

$$E^*(e^{sT}) = \text{Imag.} \left[-\frac{W e^{j\varphi_0}}{1 - e^{-(s - j\omega_0)T}} \right] \quad (7.25)$$

$$\therefore X_h(s) = \text{Imag.} \left\{ -\frac{W(1 - e^{-sT}) D_F^*(e^{sT}) e^{j\varphi_0}}{s[1 - e^{-(s - j\omega_0)T}]} \right\} \quad (7.26)$$

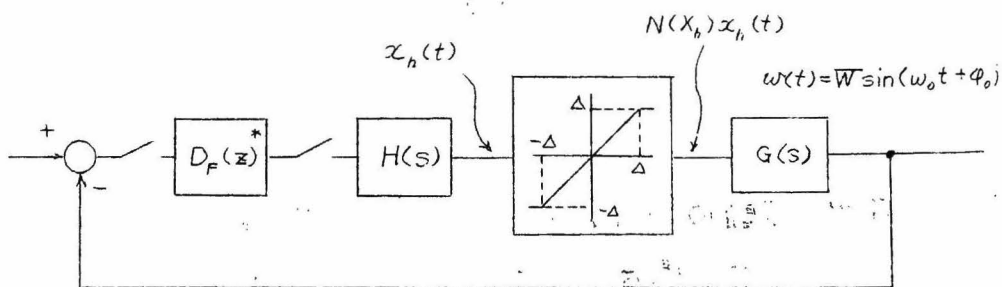


図 7.8 理想的飽和特性を有するサンプル値制御系

ホールド回路出力の定常値を更めて $x_h(t)$ と記するものとすれば、

$$x_h(t) = \text{Imag. } jW D_F^*(e^{j\omega_0 T}) \frac{1 - e^{j\omega_0 T}}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(\omega_0 + i\omega_s)t}}{\omega_0 + i\omega_s} \quad (7.27)^{**}$$

ここに $\omega_s = 2\pi/T$

* $G(s)$ が積分特性を有すると否とにかかわらず飽和は(正負)対称になる。

** 頁123参照。

上式は零次ホールド出力階段状波形をフーリエ級数により表わしたものを意味する。上式において $\omega_s \gg \omega_o$ 、すなわち生起する振動の角周波数がサンプリング角周波数に比べ非常にゆっくりしている場合には、 $l \neq 0$ の項は $l=0$ の項に比べ無視することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} x_h(t) &\doteq \text{Imag. } j\overline{W} D_F^*(e^{j\omega_o T}) (1 - e^{-j\omega_o T}) \frac{e^{j\omega_o t}}{T\omega_o} \\ &= \text{Imag. } \left[-\overline{W} H(j\omega_o) D_F^*(e^{j\omega_o T}) \frac{e^{j\omega_o t}}{T} \right] \quad (7.28) \end{aligned}$$

上式は図 7.9 に示すように零次ホールド回路出力階段状波形の基本波成分を意味する。

この基本波成分に対し連続系における同じ意味の等価伝達関数を定義することにより平衡条件はつぎのように表わされる。

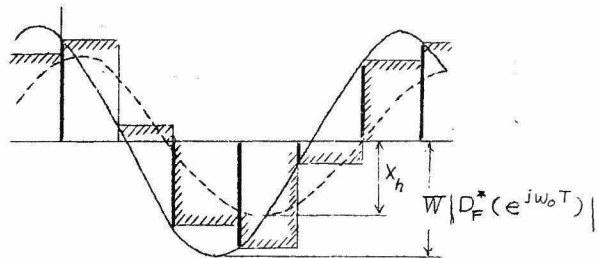


図 7.9 $\omega_s \gg \omega_o$ の場合の等価伝達関数法 (その 2)

$$1 + \frac{1}{T} N(X_h) H(j\omega_o) D_F^*(e^{j\omega_o T}) G(j\omega_o) = 0$$

$$N(X_h) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{\Delta}{X_h} + \frac{\Delta}{X_h} \cos \left(\sin^{-1} \frac{\Delta}{X_h} \right) \right]$$

$$X_h = \frac{\overline{W}}{T} |H(j\omega_o)| |D_F^*(e^{j\omega_o T})| \quad (7.29)$$

7.3.2 制御系目標値入力の定常値が一定値 r の場合

7.2 の場合と同様、零次ホールド回路出力 (飽和要素入力) 信号に含まれる定常直流成分を r_1 とすれば平衡条件は、

(1) $D_F^*(z)$ が $z=1$ なる極を有する場合

$$N_o(X_h, r_1) = \frac{r}{G(s)|_{s=0}} \quad (7.31)$$

$$\frac{1}{T} H(j\omega_0) D_F^*(e^{j\omega_0 T}) G(j\omega_0) = -\frac{1}{N_1(X_h, r_1)} \quad (7.32)$$

(2) $D_F^*(z)$ が $z=1$ なる極を含まない場合

$$N_0(X_h, r_1) = \left. \frac{r D_F^*(e^{sT}) - r_1}{D_F^*(e^{sT}) G(s)} \right|_{s=0} \quad (7.33)$$

$$\frac{1}{T} H(j\omega_0) D_F^*(e^{j\omega_0 T}) G(j\omega_0) = -\frac{1}{N_1(X_h, r_1)} \quad (7.34)$$

で与えられる。 $N_0(X_h, r_1)$, $N_1(X_h, r_1)$ は勿論、式(7.16)で与えられた X (制御装置出力パルス列の包絡線の振巾) の代りに、この出力パルス列をホールド回路に通したとき得られる階段状波形の基本波成分の振巾 X_h が変数になったものである。式(7.31), (7.32) または式(7.33), (7.34) より X_h, r_1 の値を求める作図的手法は 7.2 において述べたことと全く同じである。

7.4 上記 7.2, 7.3 に示した手法の適用例

図 7.10 はさきに述べた 5.2.3 実際例その 3 に示した系に対し、7.2 および 7.3 の手法を適用するためえがいたベクトル軌跡である。上記各手法に対応する線形要素の間波数ベクトル軌跡と等価ゲイン軌跡との交点の読みは 7.2, 7.3 (いずれの場合も同じ値、すなわち

$$\omega_0 T \doteq 0.57, \quad \text{すなわち} \quad \omega_0 \doteq 0.57/T = 0.57 \omega_s / 2\pi \doteq \omega_s / 11$$

$$N(X) = N(X_h) \doteq 0.22 \quad (7.35)$$

すなわち、この系においては、サンプリング周期の約 11 倍を周期とするゆっくりした振動の平衡点が存在し、かつそのときの振巾 $X \doteq X_h$ は図 5.7(a) に示した制御装置出力過渡応答波形上の鎖線のように予測

* 非線形要素入力振巾 X (7.2 の手法に従う場合) および X_h (7.3 の手法に従う場合) をパラメータとし、 $-1/N(X)$ および $-1/N(X_h)$ を複素ベクトル平面にえがいたもの。この場合、 $N(X)$, $N(X_h)$ 共正の実数なる故、 $-1/N(X) = -1$ より始まる虚軸上の半無限直線となる。

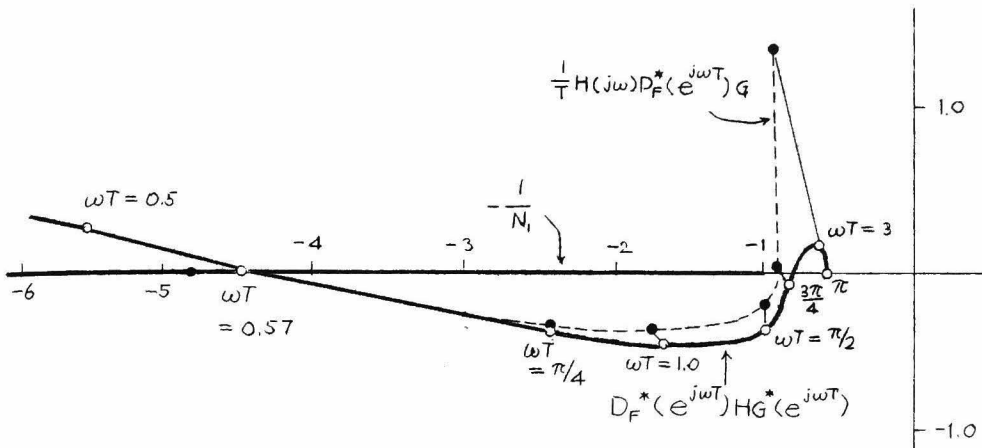


図 7.10 5.2.3 実際例その 3 の系に対する 7.2, 7.3 の手法の適用例

される。また、この系の周波数ベクトル軌跡の全体は図 7.11 のようになり*、平衡点は不安定で、1 且振動を生ずれば振中の増大、周波数減少の方向をたどる。

以上の結果は図 5.7 の実測記録と全く一致する。

つぎに図 7.12 は 5.2.1 実際例その 1 に示した系に対し、上記 2 つの手法を適

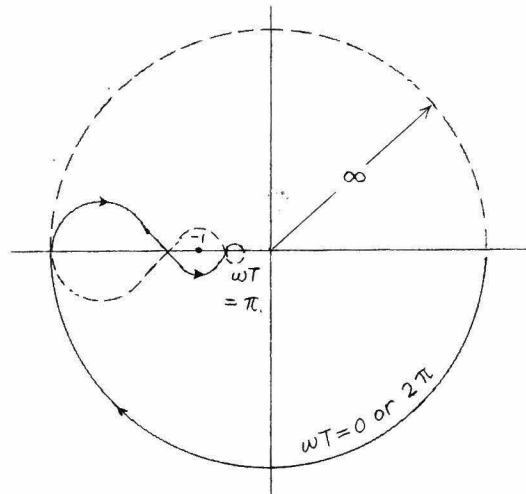


図 7.11 ベクトル軌跡図 7.10 の $\omega = 0, 2\pi/T$ 近辺における模様

用したものである。7.2 の手法による結果では周波数軌跡 $D_F^*(e^{j\omega T})HG^*(e^{j\omega T})$ と振中軌跡 $-1/N(x)$ とが $\omega_0 T = \pi$ において交点を有し、図 5.3 に示された乱調（サンプリング周期の 2 倍を周期とするもの）の不安定平衡点の存在を示しているが、7.3 の手法による結果では交点を持たない。かつ実線で示した $D_F^*(e^{j\omega T})HG^*(e^{j\omega T})$ 軌跡と破線で示

* $D_F^*(z)$ 自身不安定極を有し、開ループ系は不安定である。

した $\frac{1}{N_i} D_F^*(e^{j\omega T}) H(j\omega) G(j\omega)$ 軌跡とは $\omega T > 1.0$ の範囲では離れて存在する。すなわち、振動周波数がサンプリング周波数に近づくにしたがって 7.2, 7.3 両手法の差が大きくなることを示している。このことは 7.2 および 7.3 表題に記したように $\omega_0 \gg \omega_s$ なる場合に対してのみこれらの手法が有効であり、実際例その 1 に示すような ω_0 と ω_s が接近した場合に対しては信頼できる結果を与えないことを意味する。

図 7.13 は 5.2.2 実際例その 2 に示した $T_0 = 3T$ なる振動の不安定平衡点を有する系に対し、7.2 の手法を適用したもので、 $T_0 = 3T$ に相当する周波数ベクトル上の点 ($\omega T = 2\pi/3$) は振中軌跡に非常に近いところに存在するが、やはり一致はしていない。

7.5 非線形振動 の周波数がサンプリング周波数に近い場合

7.2 および 7.3 において述べた等価伝達関数法は、制御装置出力パルス列 $x^*(t)$ の包絡線、若しくはこのパルス列が零次ホールド回路を通った後得られる周期的階段状波形の基本正弦波 $x_h(t)$ に対し、等価伝達関数を定義したものであり、運

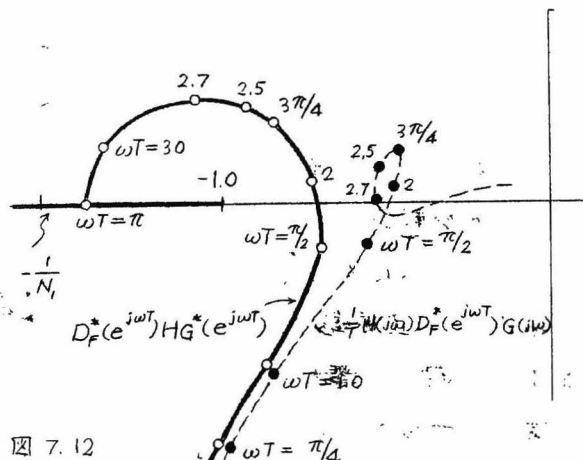


図 7.12 5.2.1 実際例その 1 に対する 7.2, 7.3 の手法の適用例

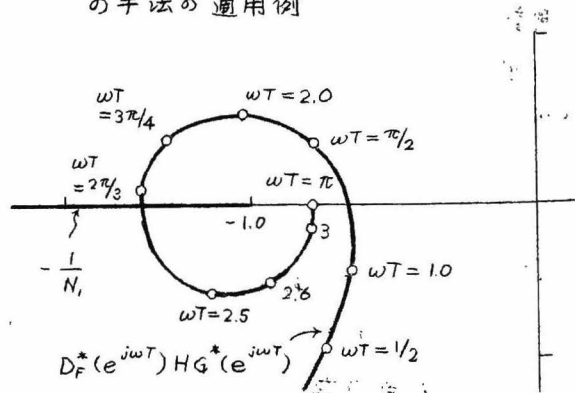


図 7.13 5.2.2 実際例その 2 に対する 7.2 の手法の適用例

* 式(7.27)においてはホールド出力も同じ記号 $x_h(t)$ で表わしている。

統系のそれと同じく非線形特性が飽和の場合には入力正弦波の振中のみの関数となり、サンプル系の場合当然考えなければならない振動の周波数とサンプリング時点に対する振動の位相関係については何尋考りよしていない。したがって振動周波数がサンプリング周波数に近づくにしたがって、上記2つの方法の適用には無理を生じ、事実と合致しなくなることが容易に想像される。本節においては振動角周波数 ω_0 がサンプリング角周波数 ω_s に近い場合に対し、相互の周波数の間の関係、サンプリング時点に対する振動の位相関係を考えた等価伝達関数の定義について述べる。ただしここに述べる方法は以下に示す仮定が成立する範囲において適用可能である。すなわち、

- (1) $D_F^*(z)$ あるいは $G(s)$ は少なくとも1個の積分性の極を有するものとする。——— この仮定の下においては、一般に系の振動が周期的であるためには、飽和要素出力パルスの一周期に亘る平均は零でなければならない*。ところが飽和要素出力が符号を変えるのは、例えば図 7.9 より明らかなように 零次ホールド回路のためサンプリング時点のみに限られる。すなわち、このことは振動周波数 ω_0 とサンプリング周波数 ω_s が整数比をなすことを意味する。したがって現象を周期的現象に限って考える場合には、その周波数 ω_0 と ω_s とは $\omega_s/\omega_0 = 2, 3, 4, \dots$ なる場合を仮定すればよい。
 - (2) ここで更に、系の連続信号 $w(t)$, $e(t)$ 等が正弦波状であると近似できるものと仮定する。——— この仮定の下においては、式(7.7)よりわかるように、飽和要素入力パルス列 $x^*(t)$ の包絡線はやはり正弦波状と考えることができる**。
- さて、図 7.8 の等価回路において、制御装置定常出力パルス列 $x^*(t)$ が零次ホールド回路および飽和要素を通過した場合、その出力は図 7.14

* 頁 160

** ω_0 と ω_s が近い値の場合にこの仮定をかくことは、この方法でとりあつかえるサンプル値系の乱調現象の範囲を非常に限定することになる。

に示すように斜線をほどこせる階段状波形で表わされる。この斜線をほどこせる階段状波形の基本波成分を $y(t)$ とすれば、

$$y(t) = \text{Imag. } N \omega_s / \omega_o (X, \varphi_x) X e^{j(\omega_o t + \varphi_x)} \quad (7.36)$$

ここに $N \omega_s / \omega_o (X, \varphi_x)$

は飽和要素および零次ホールドを含めた要素の等価伝達関数を意味し、制御装置出力の包絡線の振巾 X およびサンプリング時点に対する位相 φ_x の関数になると共に、 ω_s / ω_o の値によりその関数形を異にする。また ω_s / ω_o が一定であっても、図 7.14 に示すように飽和の程度によって、関数形が不連続的に

変ることが予想

される。図 7.14 (a) の場合を $\omega_s / \omega_o = 4$, Mode I (b) の場合を $\omega_s / \omega_o = 4$ Mode 2 と呼び、等価伝達関数をそれぞれ、

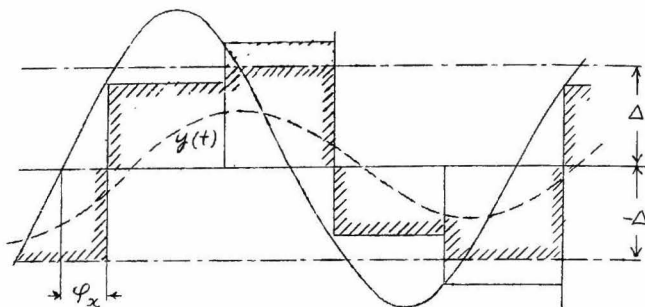
$$N_4^{(1)} (X, \varphi_x), (\text{Mode 1})$$

$$N_4^{(2)} (X, \varphi_x), (\text{Mode 2})$$

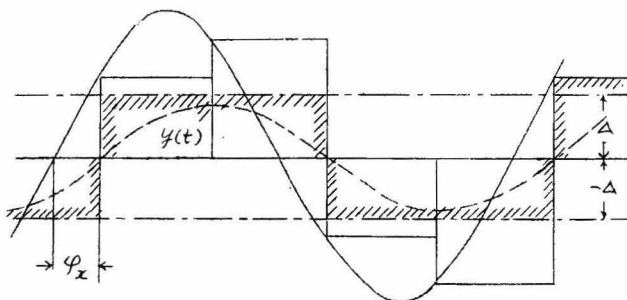
と表わすことにする。

平衡条件は明らかに、

$$1 + N_{\omega_s / \omega_o}^{(m)} (X, \varphi_x) G(j\omega_o) D_F^* (e^{j\omega_o T}) = 0 \quad \} \quad (7.37)$$



(a) $\omega_s / \omega_o = 4$, Mode 1



(b) $\omega_s / \omega_o = 4$, Mode 2

図 7.14 $\omega_s \cong \omega_o$ の場合の等価伝達関数法

$$X = W |D_F^*(e^{j\omega_0 T})|, \quad \varphi_x = -\varphi_0 - \angle D_F^*(e^{j\omega_0 T})$$

$N_{\omega_s/\omega_0}^{(m)}(X, \varphi_x)$ の関数形は ω_s/ω_0 が偶数の場合と奇数の場合につき
 づきのように表わされる。

7.5.1 ω_s/ω_0 が偶数の場合

ω_s/ω_0 が 2, 4, 6, ... 等偶数の場合には、考えるべきサンプリング
 時点に対する位相 φ_x としては $-\pi/\omega_s/\omega_0 \leq \varphi_x \leq \pi/\omega_s/\omega_0$ について
 考えればよいことは、図 7.15 より明らかである。すなわち $|\varphi_x| >$
 $\pi/\omega_s/\omega_0$ なる場合には、 t 軸を適当にサンプリング周期 T の整数倍シフ
 トすることにより、上記範囲内に持来たすことができる。^{*}

(1) $\omega_s/\omega_0 = 2$: こ

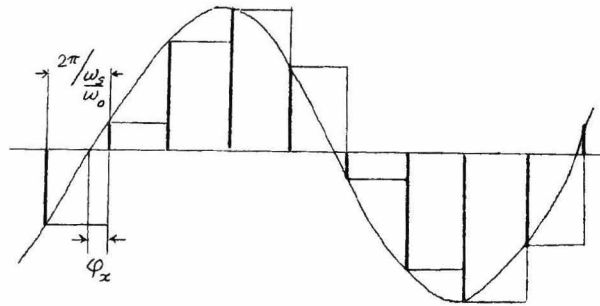
の場合 考えられ
 る飽和状態は Mode
 1 のみである。

φ_x の変化範囲 ..
 $-\pi/2 \leq \varphi_x \leq$
 $\pi/2$

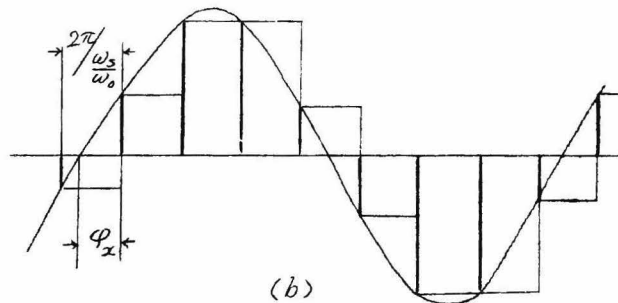
飽和を生ずるため
 には図 7.16 より明
 らかなように、

$$0 \leq \Delta < X \sin \varphi_x \quad (7.38)$$

したがって、上記不
 等式を満足する X の
 最小値 X_{\min} , 最大
 値 X_{\max} はそれぞれ



(a)



(b)

図 7.15 ω_s/ω_0 が偶数の場合における振動
 とサンプリング時点との位相関係

* 定常状態を論ずるいまの場合には、 $t=0$ の時間原点をサンプリング周期
 の整数倍、 t 軸のいずれの方向にシフトしても問題評価に変わりはない。

$$X_{\min} = \frac{\Delta}{\sin \varphi_x},$$

$$X_{\max} = \infty$$

(7.39)

でなければならない。図

7.16 の斜線をほどこし

た波形の基本調波成分と

制御装置出力パルス列

$x^*(t)$ の包絡線との比、

すなわち等価伝達関数 $N_2^{(1)}(X, \varphi_x)$ は、

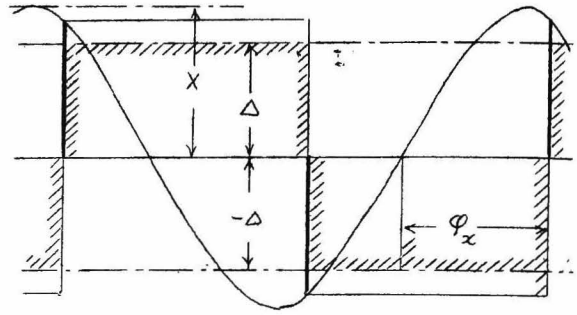


図 7.16 $\omega_s/\omega_o = 2$ の振動とサンプリング時点との位相関係

$$N_2^{(1)}(X, \varphi_x) = \frac{4\Delta}{\pi X} e^{-j\varphi_x} \quad (0 \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{2}) \quad (7.40)$$

一般にナイキスト平面で平衡点の存在を検討する場合、 $-1/N$ で表わしておく方が便利である。

すなわち、

$$-\frac{1}{N_2^{(1)}(X, \varphi_x)} = -\frac{\pi X}{4\Delta} e^{j\varphi_x} \quad (0 \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{2}) \quad (7.41)$$

上式に式(7.39)の値を代入することにより、複素平面における

$-1/N_2^{(1)}(X, \varphi_x)$ の境界を求めることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{N_2^{(1)}(X_{\min}, \varphi_x)} &\equiv -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{X_{\min}} = -\frac{\pi e^{j\varphi_x}}{4 \sin \varphi_x} \\ -\frac{1}{N_2^{(1)}(X_{\max}, \varphi_x)} &\equiv -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{X_{\max}} = -\infty e^{j\varphi_x} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{2}) \quad (7.42)$$

また、 $\varphi_x = 0$, $\varphi_x = \pi/2$ の限界においては、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{N_2^{(1)}(X, 0)} &\equiv -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_0 = -\infty \\ -\frac{1}{N_2^{(1)}(X, \pi/2)} &\equiv -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{\pi/2} = -j \frac{\pi X}{4\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (\Delta \leq X \leq X_{\max} = \infty) \quad (7.43)$$

$-\pi/2 \leq \varphi_x \leq 0$ に対しては明らかに,

$$-\frac{1}{N_2^{(1)}(X, \varphi_x)} = \frac{\pi X}{4\Delta} e^{-j\varphi_x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_x \leq 0\right) \quad (7.44)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{x_{\min}} &= \frac{\pi e^{-j\varphi_x}}{4 \sin \varphi_x} \\ -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{x_{\max}} &= \infty e^{-j\varphi_x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_x \leq 0\right) \\ -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_0 &= \infty \\ -\frac{1}{N_2^{(1)}} \Big|_{\pi/2} &= -j \frac{\pi X}{4\Delta} \quad (\Delta \leq X \leq X_{\max} = \infty) \end{aligned} \right\} (7.45)$$

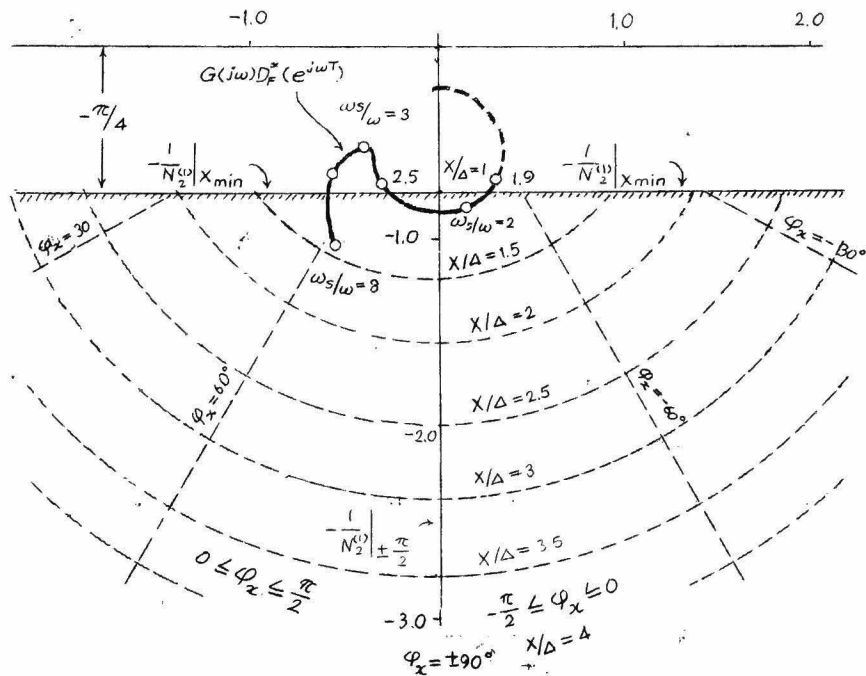


図 7.17 $\omega_s/\omega_0=2$ の平衡状態成立領域

図 7.17 は式 7.41~7.45 の関係を複素平面上にえがいたものである。この平面上に線形開ループ伝達関数の周波数軌跡 $G(j\omega)D_F^*(e^{j\omega T})$ をえがいたとき、 $\omega = \omega_s/2$ に対応する軌跡上の点が図の斜線部分に入れば

サンプリング周期の2倍を周期とする正弦波状振動の平衡点が存在することになり、その場合の X および φ_x 、したがって式(7.37)より平衡点における制御系出力波形の振巾およびサンプリング時点に対する位相 φ_0 が計算できることになる。図に記入せる周波数軌跡 $G(j\omega)D_F^*(e^{j\omega T})$ の曲線は、5.2.1 実際例その1の系であり、図5.3にみられるような三角波状に近い連続波形の場合でもこの基本成分をとり、正弦波状と近似しても相当信頼できる結果が得られることを表わしている。

(2) $\omega_s/\omega = 4$: この場合考えられる飽和状態はさきに図7.14に示した Mode 1, Mode 2 の2つの場合である。

φ_x の変化範囲 $\dots -\pi/4 \leq \varphi_x \leq \pi/4$

(2-1) Mode 1 : Mode 1 の飽和を生ずるためには図7.15(a)より明らかなように、

$$X \sin \varphi_x \leq \Delta \leq X \sin(\varphi_x + 2\pi/\omega_s/\omega_0) = X \sin(\varphi_x + \pi/2) = X \cos \varphi_x \quad (7.46)$$

したがって Mode 1 の飽和を生ずるための最小の X 、最大の X の値は

$$X_{\min} = \frac{\Delta}{\cos \varphi_x}, \quad X_{\max} = \frac{\Delta}{\sin \varphi_x} \quad (7.47)$$

図7.14 および式(7.47)、更に上記 φ_x 変化範囲より、この場合における等価伝達関数および複素平面における境界はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N_4^{(1)}(X, \varphi_x)} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2} e^{j\varphi_x}}{[\sin^2 \varphi_x + (\frac{\Delta}{X})^2]} \left[e^{-j\frac{\pi}{4}} \sin \varphi_x + \frac{\Delta}{X} e^{j\frac{\pi}{4}} \right] \\ -\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{X_{\min}} &= -\frac{\sqrt{2} \pi}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad -\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{X_{\max}} = -\frac{\pi}{4} \cot \varphi_x - j\frac{\pi}{4} \\ &\quad (0 \leq \varphi_x \leq \pi/4) \\ -\frac{1}{N_4^{(1)}(X, \varphi_x)} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2} e^{-j\varphi_x}}{[\sin^2 \varphi_x + (\frac{\Delta}{X})^2]} \left[-e^{-j\frac{\pi}{4}} \sin \varphi_x + \frac{\Delta}{X} e^{j\frac{\pi}{4}} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{X_{\min}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad -\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{X_{\max}} = -\frac{\pi}{4} - j\frac{\pi}{4} \cot \varphi_x$$

$$(-\pi/4 \leq \varphi_x \leq 0)$$

$$-\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad -\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_0 = -\frac{\sqrt{2}\pi X}{4\Delta} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad -\frac{1}{N_4^{(1)}} \Big|_{-\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$(\Delta \leq X \leq \infty)$$

(7.48)

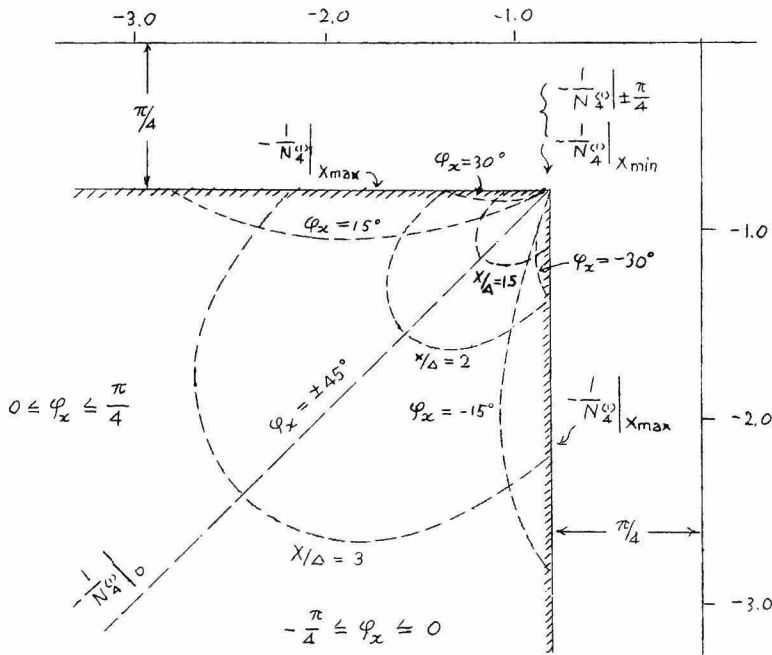


図 7.18 $\omega_s/\omega_0 = 4$, Mode 1 の平衡状態成立領域

図 7.18 は式(7.48)の関係を複素平面にえがいたものである。線形要素の周波数軌跡 $D_F^*(e^{j\omega T})G(j\omega)$ 上の $\omega_s/\omega_0 = 4$ に対応する点が図の斜線領域に含まれる場合、 $\omega_s/\omega_0 = 4$, Mode 1 (図 7.14 (a)) の振動の平衡点が存在することになる。

(2-1) Mode 2 : Mode 2 の飽和を生ずるためには、図 7.14 (b) より明らかなように、

$$0 \leq \Delta \leq X \sin \varphi_x \quad (7.49)$$

したがって Mode 2 の飽和を生ずるための最小の X ，最大の X の値は、

$$X_{\min} = \frac{\Delta}{\sin \varphi_x}, \quad X_{\max} = \infty \quad (7.50)$$

図 7.14 および式 (7.50)、更に φ_x の変化範囲より、この場合における等価伝達関数および複素平面における境界はつぎのようになる。

$$-\frac{1}{N_4^{(2)}(X, \varphi_x)} = -\frac{\pi X}{4\Delta} e^{j\varphi_x}, \quad -\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{X_{\min}} = \frac{\pi}{4} \cot \varphi_x - j \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{X_{\max}} = -\infty e^{j\varphi_x} \quad (0 \leq \varphi_x \leq \pi/4)$$

$$-\frac{1}{N_4^{(2)}(X, \varphi_x)} = \frac{\pi X}{4\Delta} e^{-j\varphi_x}, \quad -\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{X_{\min}} = -\frac{\pi}{4} - j \frac{\pi}{4} \cot \varphi_x,$$

$$-\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{X_{\max}} = \infty e^{-j\varphi_x} \quad (-\pi/4 \leq \varphi_x \leq 0)$$

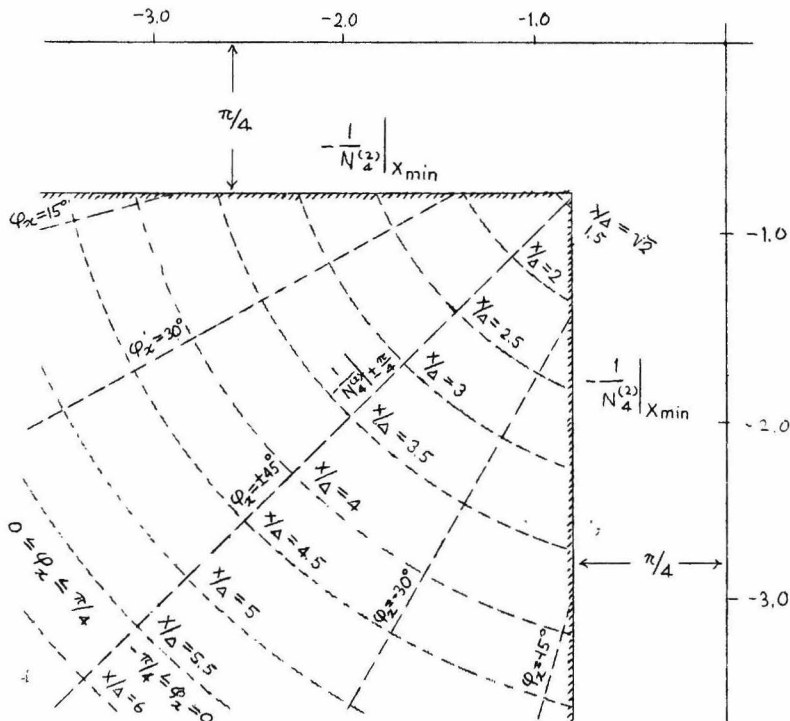


図 7.19 $\omega_s/\omega_0 = 4$, Mode 2 の平衡状態成立領域

$$-\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{\pi/4} = -\frac{\pi X}{4\Delta} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad -\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_0 = \infty, \quad -\frac{1}{N_4^{(2)}} \Big|_{\pi/4} = -\frac{\pi X}{4\Delta} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$(\Delta/\sin \pi/4 \leq X \leq \infty)$$

以上(7.51)

図 7.19 は式(7.51)の関係を複素平面にえがいたものである。周波数軌跡上の点 $\omega_s/\omega = 4$ に対応する点が図の斜線部分に含まれる場合、 $\omega_s/\omega = 4$, Mode 2 の振動の平衡点が存在することになる。図 7.18, 7.19 を比べればわかるように Mode 1, Mode 2 の境界は全く一致する。したがって線形周波数軌跡 $D_F^*(e^{j\omega T})G(j\omega)$ 上の $\omega_s/\omega = 4$ の点がどちらか一方の斜線領域に含まれる場合には、当然、いま一つの Mode の領域にも含まれることになる。この場合 Mode 1, Mode 2 どちらの振動が発生しうるかは、系に与えられた初期条件によってきまるものと考えられる。オン・オフ・サンプル恒系に見られる $\omega_s/\omega = 4$ の振動、図 6.32, 6.34 は非線形要素が中立帯を含みレーであり、この場合の説明(図 7.18, 7.19 は飽和非線形に対する等価伝達関数)には不適当かもしれないが、初期条件の違いにより、Mode 1 (図 6.32)および Mode 2 (図 6.34)の起こる実例である。

なお図 7.17 に記入した 5.2.1 実例例その 1 の系の周波数軌跡上の点 $\omega_s/\omega = 4$ は図 7.18 若しくは図 7.19 の領域には含まれない。

7.5.2 ω_s/ω が奇数の場合

ω_s/ω が 3, 5, 7 …… の場合には、 φ_x のとりうる範囲は ω_s/ω が偶数の場合のように一様に $-\pi/\omega_s/\omega_0 \leq \varphi_x \leq \pi/\omega_s/\omega_0$ とはならず、 ω_s/ω_0 の個々の場合により異なる。

(1) $\omega_s/\omega_0 = 3$: この場合、頁 199 仮定(1)によりサンプリング時点に関する位相 φ_x としては図 7.20 に示すように $\varphi_x = 0$, $\varphi_x = \pi/\omega_s/\omega_0 = \pi/3$ について考えればよい。ところが、実際には図より明らかなように、 $\varphi_x = 0$ の場合の等価伝達関数と $\varphi_x = \pi/3$ の場合の等価伝達関数とは全く同じものであり、いずれか一方について考えれば十分である。

このように $\omega_s/\omega_0=3$ の場合には φ_x は一定値 0 または $\pi/3$ なる値に固定されてしまうから、 $-1/N_3$ の複素平面における表示は ω_s/ω_0 が偶数の場合のようにある広がりを持つ領域を構成せず 直線若しくは曲線で表わされることになる。

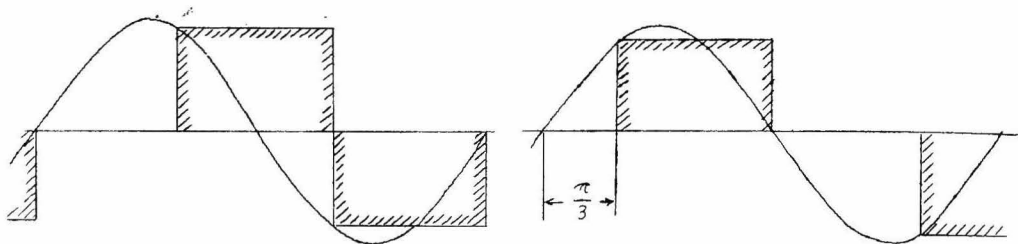


図 7.20 $\omega_s/\omega_0=3$ の振動とサンプリング時点との位相関係

この場合考えられる飽和状態は図 7.20 より明らかなように、Mode 1 のみである。すなわち、

$$0 \leq \Delta \leq X \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} X \quad (7.52)$$

これから

$$X_{\min} = \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}, \quad X_{\max} = \infty \quad (7.53)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{N_3^{(1)}(X)} &= -\frac{\pi X}{3\Delta} e^{j\frac{\pi}{3}} \\ -\frac{1}{N_3^{(1)}} \Big|_{X_{\min}} &= -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad -\frac{1}{N_3^{(1)}} \Big|_{X_{\max}} = -\infty e^{j\frac{\pi}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

上式を複素平面に表わせば図 7.21 に示すような半無限直線となる。図に記入した周波数軌跡 $D_F^*(e^{j\omega T})G(j\omega)$ は 5.2.2 実際例その 2 に示した系であり、両軌跡は交点を持たず、 $\omega_s/\omega_0=3$ の平衡点は存在しないことになる。しかしながら周波数軌跡上の $\omega_s/\omega_0=3$ に対応する点は $-1/N_3^{(1)}(X)$ 軌跡に非常に近く、ここに述べた方法が頁 199 仮定 (2) の下で適用されうることを考えれば、実際にこの系において見られる図 5.5 に示すような $\omega_s/\omega_0=3$ の乱調現象の存在は十分推測できるものと考ええる。

(2) $\omega_s/\omega_o = 5$:

ω_s/ω_o が 5 の場合、振動の一周期に現われる制御装置出力パルスの大きさはつぎのように表わされる。

$$x_1 \equiv X \sin \varphi_x$$

$$x_2 \equiv X \sin \left(\frac{2\pi}{5} + \varphi_x \right)$$

$$x_3 \equiv X \sin \left(\frac{4\pi}{5} + \varphi_x \right)$$

$$x_4 \equiv X \sin \left(\frac{6\pi}{5} + \varphi_x \right)$$

$$x_5 \equiv X \sin \left(\frac{8\pi}{5} + \varphi_x \right)$$

以上 (5.55)

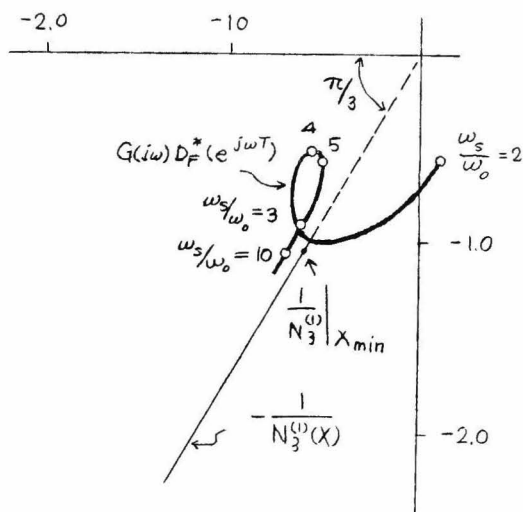
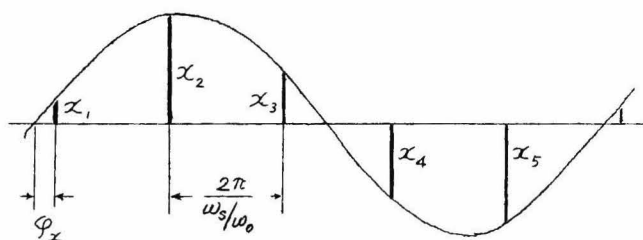
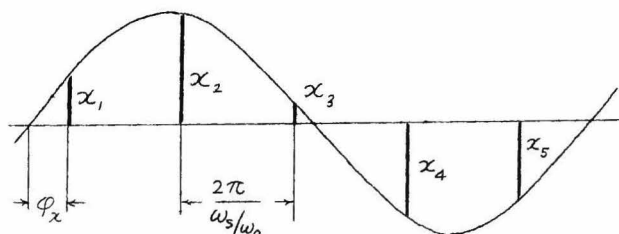


図 7.21 $\omega_s/\omega_o = 3$ の平衡状態成立領域 (直線上)



(a)

$$0 \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{10}, |x_2| > |x_5| > |x_4| > |x_3| > |x_1|$$



$$(b) \quad \frac{\pi}{10} \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{5}, |x_2| > |x_4| > |x_5| > |x_1| > |x_3|$$

図 7.22 $\omega_s/\omega_o = 5$ の振動とサンプリング時点との位相関係とサンプリングパルスの大小

然して $0 \leq \varphi_x \leq \pi/10$ の場合、図 7.22 (a) より明らかなように、 x_1, x_2, \dots, x_5 の大小関係はつぎのようになる。

$$|x_2| > |x_5| > |x_4| > |x_3| > |x_1| \quad (7.56)$$

また、 $\pi/10 \leq \varphi_x \leq \pi/5$ に対しては図 7.22 (b) より明らかなように、

$$|x_2| > |x_4| > |x_5| > |x_1| > |x_3| \quad (7.57)$$

$|\varphi_x| > \pi/5$ に対しては上記の場合の繰返しになり考える必要はない。

式(7.56), (7.57)の関係より各種飽和 Mode の存在の有無を検討すればつぎのようになる。

(2-1) x_2 のみが飽和する場合：飽和要素出力の1周期に亘る積分には必ず直流分が現れ、頁199仮定(1)が成立せず、このような平衡状態は存在しない。

(2-2) $x_2 \geq \Delta$, x_5 又は $x_4 \leq -\Delta$ ：直流成分が飽和要素出力に現れないためには、

$$\left. \begin{aligned} x_4 + x_3 + x_1 &= 0 & (0 \leq \varphi_x \leq \pi/10) \\ x_5 + x_1 + x_3 &= 0 & (\pi/10 \leq \varphi_x \leq \pi/5) \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

式(7.56)の諸関係を式(7.58)に代入することにより、式(7.58)を満足する φ_x は $0 \leq \varphi_x \leq \pi/5$ の範囲においては $\varphi_x = 0$ 以外に存在しないことが容易に判明する。この平衡点を有する飽和状態は Mode 1 に相当する。本 Mode の飽和を生ずるためには、

$$X \sin \frac{4\pi}{5} \leq \Delta \leq X \sin \frac{2\pi}{5} \quad (7.59)$$

でなければならない。すなわち、

$$X_{\min} = \frac{\Delta}{\sin \frac{2\pi}{5}}, \quad X_{\max} = \frac{\Delta}{\sin \frac{4\pi}{5}} \quad (7.60)$$

等価伝達関数 $N_5^{(1)}(X)$ は

$$\begin{aligned} N_5^{(1)}(X) &= \frac{1}{\pi} \sin \frac{4\pi}{5} \left[\left(\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \right) + j \left(\sin \frac{2\pi}{5} - 3 \sin \frac{4\pi}{5} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta}{\pi X} \left[\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5} \right) + j \left(\sin \frac{4\pi}{5} - 2 \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right] \quad (7.61) \end{aligned}$$

となる。したがって $-1/N_5^{(1)}(X)$ の複素平面表示は $-1/N_5^{(1)}|_{x_{\min}} = -0.873 - j0.626$ より出発し、 $-1/N_5^{(1)}|_{x_{\max}} = -1.19 - j0.867$ に終る曲線となる。

(2-3) $x_2 \geq \Delta$, $x_4 \leq -\Delta$, $x_5 \leq -\Delta$: これは図 7.23 に示すような飽和状態である。飽和要素出力に直流成分が現われないためには、

$$x_3 + x_1 = \Delta$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \sin \varphi_x + \sin \left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5} \right) \\ = \frac{\Delta}{X} < 1 \end{aligned} \quad (7.62)$$

でなければならない。また図 7.23 より明らかのように、

$$\begin{cases} x_3 = X \sin \left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5} \right) \leq \Delta \\ -x_4 = -X \sin \left(\varphi_x + \frac{6\pi}{5} \right) \geq \Delta \end{cases} \quad (7.63)$$

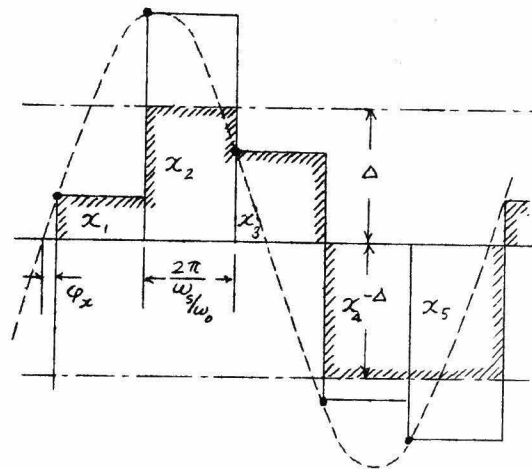


図 7.23 $\omega_5/\omega_0 = 5$ Mode 1.5 の振動平衡状態

が同時に成立しなければならない。式(7.62)、(7.63)の関係は表 7.1

φ_x	Δ/X	x_3/X	$-x_4/X$
0	0.588	0.588	0.588
0.1	0.607	0.507	0.655
0.2	0.617	0.418	0.737
0.3	0.622	0.362	0.800
0.4	0.619	0.236	0.856
0.5	0.610	0.131	0.904
$\pi/5$	0.588	0	0.951

表 7.1

に示すように、 $0 \leq \varphi_x \leq \pi/5$ の範囲のすべての φ_x に対し成立する。
すなわち上記範囲内の特定の φ_x に対し、特定の X の値が決定することになる。このような飽和の状態を Mode 1.5 と呼ぶことにする。

Mode 1.5 に対する等価伝達関数 $N_5^{(1.5)}$ はつぎのように計算される。
すなわち、

$$\begin{aligned} N_5^{(1.5)}(X, \varphi_x) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\sin\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) \left[\cos\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) - \cos\left(\varphi_x - \frac{4\pi}{5}\right) \right] \right. \right. \\ & - \sin \varphi_x \left[\cos\left(\varphi_x + \frac{2\pi}{5}\right) - \cos \varphi_x \right] \Big] + j \left[\sin\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) \left[\sin\left(\varphi_x - \frac{4\pi}{5}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) \right] + \sin \varphi_x \left[\sin\left(\varphi_x + \frac{2\pi}{5}\right) - \sin \varphi_x \right] \right] \Big\} \\ & + \frac{1}{\pi} \left[\sin \varphi_x + \sin\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) \right] \left\{ \left[\cos\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\varphi_x - \frac{4\pi}{5}\right) - \cos \varphi_x \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos\left(\varphi_x + \frac{2\pi}{5}\right) \right] + j \left[\sin\left(\varphi_x + \frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\varphi_x - \frac{4\pi}{5}\right) - \sin \varphi_x \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\varphi_x + \frac{2\pi}{5}\right) \right] \right\} \quad (7.64) \end{aligned}$$

上式に式(7.62)の関係を用うることにより、 $N_5^{(1.5)}(X, \varphi_x)$ は X および φ_x に無関係に定まり、複素平面における一点で表わされる。すなわち

$$N_5^{(1.5)} = \frac{1}{\pi} \sin \frac{4\pi}{5} \left[\left(1 + \cos \frac{2\pi}{5} - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right) - j \left(2 \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right] \quad (7.65)$$

したがって

$$- \frac{1}{N_5^{(1.5)}} = -1.19 - j0.867 = - \frac{1}{N_5^{(1)}} \Big|_{x_{\max}} \quad (7.66)$$

(2-4) x_1 または x_3 のみが飽和しない場合：この飽和状態は Mode 2 に相当する。本 Mode を実現できる φ_x の値は、 $\varphi_x = 0$ の場合だけである。

$$0 \leq \Delta \leq X \sin \frac{4\pi}{5} \quad (7.67)$$

$$X_{\min} = \frac{\Delta}{\sin \frac{4\pi}{5}}, \quad X_{\max} = \infty \quad (7.68)$$

$$-\frac{1}{N_5^{(2)}(X)} = -\frac{\pi \Delta}{2(1 + \cos \frac{\pi}{5}) \Delta} e^{j\frac{\pi}{5}} \quad (7.69)$$

$$N_5^{(2)} \Big|_{x_{\min}} = \frac{1}{\pi} \sin \frac{4\pi}{5} \left[2(1 + \cos \frac{\pi}{5}) \cos \frac{\pi}{5} - j2(1 + \cos \frac{\pi}{5}) \sin \frac{\pi}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin \frac{4\pi}{5} \left[\left(1 + \cos \frac{2\pi}{5} - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right) - j \left(2 \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right]$$

$$= N_5^{(1.5)} = N_5^{(1)} \Big|_{x_{\max}} \quad (7.70)$$

図 7.24 は式 (7.16), (7.66) および (7.69) の関係を複素平面に表わしたものである。

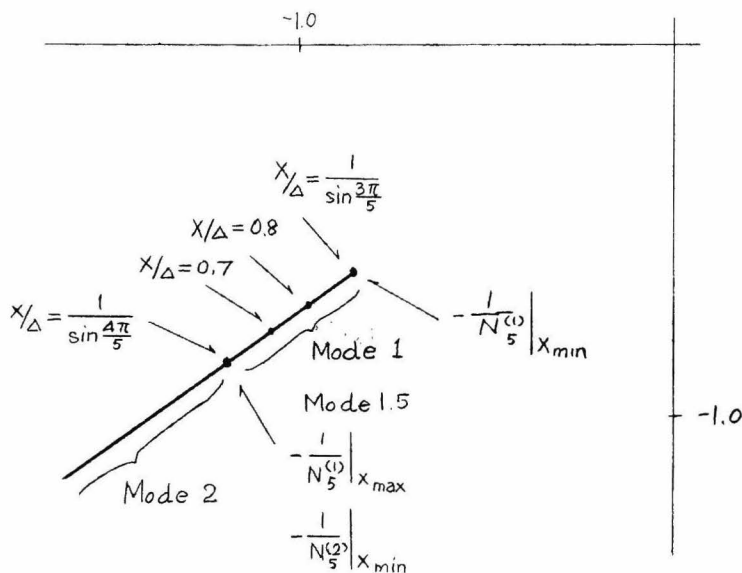


図 7.24 $\omega_s/\omega_o = 5$ の平衡状態成立領域
(直線 + 曲線上)

第Ⅲ編 サンプル値制御の実際応用と 制御装置試作に関する研究

自動制御系を大別すれば電動機^{モータ}の速度、回転角位置の制御などで代表されるサーボシステムと、各種の生産工程で見られる流量、温度、混合比、液面位などで代表されるプロセスシステムの二つになる。サンプル値制御の最も適合した対象は後者のプロセス制御の方面と言える。

一般に連続データによるプロセス制御においては制御される対象の種類^{種類}の多いこと、規模に大きな差があること、すでに半自動運転状態にあるプロセスに対し、制御ループを設ける場合が多いなどのために、調節計と呼ばれる比例・積分および微分操作を基本動作とする市販の制御装置が使用されることが大部分である。而して制御系のシミュレーション、設計に該当する仕事としては調節計の挿入個所の吟味、挿入方法、各基本動作の強さの調整、補助動力により分類される調節計の種類^{種類}の選別、制御または検出すべき信号と調節計に使用する信号間の変換、中央管理の実現を含めた各種計装、および信号伝達問題などである。

第8章 サンプル値制御用制御装置

以上のような連続データプロセス制御系における調節計の役割をするものをサンプル値制御の分野に求めるならば図8.1に示すサンプル値フィードバック系において $D_F^*(z)$ なるサンプリング制御装置として、制御すべき対象 $G(s)$ に応じ、その入出力間に広範囲のパルス伝達特性を与えうるようなものを用うことが望まれるわけであり、かつそのパルス伝達特性の変更が、装置附属のダイヤル等により任意に行ないうること、サンプリング周期の変更が容易であることなどが更に要求される。

いま図8.1に示す系において、制御装置入出力間のパルス伝達関数

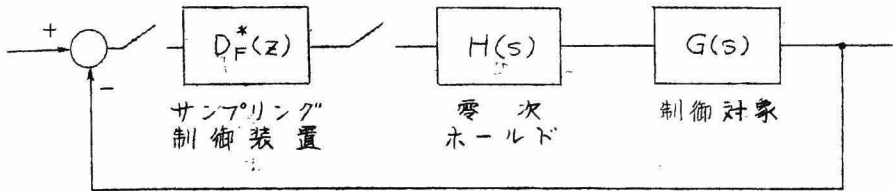


図 8.1 サンプル値制御系とサンプル値制御装置

$D_F^*(z)$ が

$$D_F^*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_s z^{-s}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}} \quad (8.1)$$

で与えられる場合、 $a_0 \neq 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$, $b_1 = -1$, $b_2 = b_3 = \dots = b_r = 0$ とセットすれば、装置のインデシャル応答は図 8.2 のようになり、サンプリング周期 T が系の応答時間に比べ十分短かくえられたならば近似的に連続“比例+積分動作”と同様の効果が期待できる。この場合、上記の制御範囲内でサンプリング周期 T をかえることにより積分時間を変えたと同様の効果を得る。

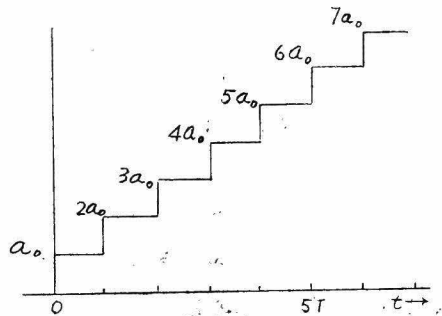


図 8.2 近似“比例+積分”動作

また $a_0 = -a_1$, $a_2 = a_3 = \dots = a_s = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$ とえらべはそのインデシャル応答は図 8.3 のようになり、近似的に微分動作を行なわせることができる。この場合も T を変更することにより、微分動作の強さすなわち微分時間に相当するものを変更することができる。

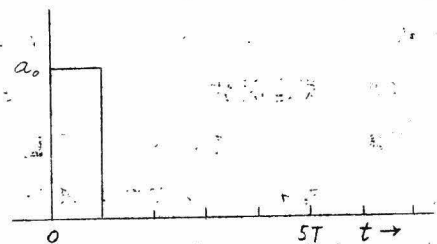


図 8.3 近似微分動作

上に述べたように極く簡単なパルス伝達関数発生装置 $D_F^*(z)$ を用う

ることにより連続系における“比例”“積分”“微分”あるいはこれらの複合動作と類似な制御動作を行なわせうることを説明したが、この外 a_i, b_i を有限整定時間応答系の設計手順にしたがって設定することにより、第1編第3章に述べた有限整定時間応答系用制御装置として使用することができる。

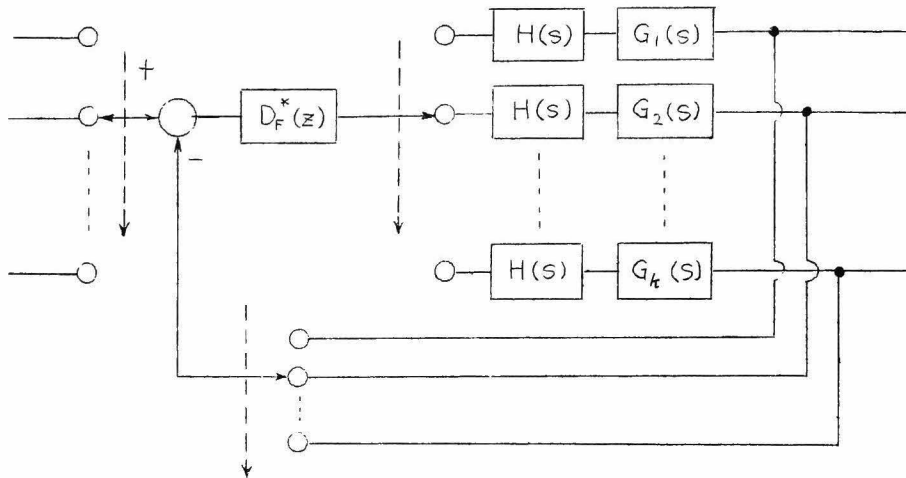


図 8 4 サンプル値多重制御系

サンプル値制御のいま1つの特長は序文に述べた通り、容易に多重制御を実施できることである。図 8.4 は1つのサンプリング制御装置による多重制御系の1例を示したものであり、経済上、中央管理などの面から大変有効な方法と思われる。

本編においては、 a_i ($i=0, 1, 2, 3$), b_i ($i=0, 1, 2, 3$) までは含むパルス伝達関数を実現することのできるオン・ライン(on-Line)用の任意パルス伝達関数発生装置(サンプリング制御装置)および現在、実際にポリスチロール線芯線被覆機のキャパシタンス制御に実用されているサンプル値多重制御装置の概要について説明する。

第9章 簡易型サンプル値制御装置

9.1 制御装置の基本的構成法

サンプル値制御系において用いられるサンプル値制御装置は制御対象 $G(s)$ に対し、 $t = nT$ から $(n+1)T$ の期間供給する操作量 x_n を $t = nT$ および、それ以前のサンプリング時点 $t = iT$ ($i = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$) における制御装置入力 $e_n, e_{n-1}, \dots, e_1, e_0$ を用い、

$$x_n = \alpha_0 e_n + \alpha_1 e_{n-1} + \alpha_2 e_{n-2} + \dots \quad (9.1)$$

なる計算により構成するものである。この各遅延信号 e_{n-i} に対する重み係数 α_i が適当な値になるようその制御系に対し制御装置 $D_F^*(z)$ を設計することにより、さきに述べた有限整定時間応答をはじめ、連続系における“比例”“積分”“微分”およびそれらの複合された制御方式と類似な制御を実施しうることはさきに述べた通りである。

いま制御装置 $D_F^*(z)$ の入出力パルス列をそれぞれ

$$\text{入力} \quad e^*(t) = e_0 \delta(t) + e_1 \delta(t-T) + \dots$$

$$\text{出力} \quad x^*(t) = x_0 \delta(t) + x_1 \delta(t-T) + \dots \quad (9.2)$$

と表わせば $e^*(t)$, $x^*(t)$ の z 変換 $E^*(z)$, $X^*(z)$ は、

$$E^*(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots$$

$$X^*(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + \dots \quad (9.3)$$

となる。この入出力パルス列の z 変換の比 $X^*(z)/E^*(z)$ は制御装置 $D_F^*(z)$ のパルス伝達特性によって一意的に決定する。すなわち、

$$D_F^*(z) = X^*(z)/E^*(z) \quad (9.4)$$

制御装置 $D_F^*(z)$ のパルス伝達関数は一般に式(8.1)に示すように z^{-1} の有限次多項式の比で与えられる。

式(8.1)および式(9.2)~(9.4)より $t = nT$ における制御装置出力 x_n は、

$$x_n = \frac{1}{b_0} \left\{ \sum_{i=0}^s a_i e_{n-i} - \sum_{j=1}^r b_j x_{n-j} \right\} \quad (9.5)$$

式(8.1) 若しくは式(9.5)に示したように、入出力パルス列間に...
特定のパルス伝達特性(パルス伝達関数)を与える方法として現在考え
られているものは主につぎの3つである。

(1) デジタル計算機を制御装置 $D_F^*(z)$ としてオン・ラインに用う
る方法

式(9.5)に示した $t = nT$ における制御装置出力 x_n に対する漸化
式は普通の簡単なデジタル計算機において容易にプログラムできる形
である。したがってデジタル計算機を制御ループ中に制御装置として
用うることにより多種多様のサンプル値制御を実施することができる。

(2) デイレイ・ライン(delay Line)回路網を用いて任意パルス伝
達関数 $D_F^*(z)$ を得る方法

式(8.1)に示したパルス伝達関数 $D_F^*(z)$ はいくつかの遅延要素、
加減算機構、ポテンショメータおよび増巾器を用うることにより実現す
ることができる。いまその原理を簡単に説明すれば、一般のパルス伝達
関数 $D_F^*(z)$ はつぎの2つの基本形に分けることができる。すなわち、

$$D_F^*(z) = X^*(z)/E^*(z) = a_0 + a_1 z^{-1} \quad (9.6)$$

$$D_F^*(z) = X^*(z)/E^*(z) = a_0 / (1 + b_1 z^{-1}) \quad (9.7)$$

式(9.6)および(9.7)より $t = nT$ における出力 x_n は各々、

$$x_n = a_0 e_n + a_1 e_{n-1} \quad (9.8)$$

$$x_n = a_0 e_n - b_1 x_{n-1} \quad (9.9)$$

式(9.8), (9.9)に示すパルス伝達特性はサンプリング周期 T に等しい
遅延時間を有する遅延要素、増巾器若しくはポテンショメータ(a_0, a_1, b_1
の絶対値が1より大きいときは増巾器、小さいときはポテンショメ
ータを図9.1(a),(b)に示すように接続することにより簡単に実現で
きる。したがって、これらの回路網を適宜組合せることにより、入出力
間に任意のパルス伝達特性を与えることができる。

(3) 普通のRC回路とサンプラおよび零次ホールド回路を用う場合

この方法は普通のRC要素を適当に組合せ、そのパルス伝達関数が、所要のパルス伝達特性 $D_F^*(z)$ に一致するよう回路を設計するもので、上記2つの方法に比し、伝達関数の変更、実現可能なパルス伝達関数の種類といった点に不十分な感じがあ

るが、機能的には最も簡単である。

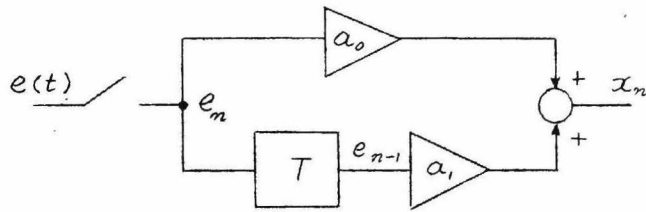
以上、その入出力パルス列間に特定のパルス伝達特性を与える装置（任意パルス伝達関数発生装置）の主なもの3つについてその原理を説明したが、本章において説明する簡易型サンプリング制御装置は(2)に述べたディレイ・ライン回路網を用いて任意パルス伝達関数を生ずるもので、オン・ライン制御装置として十分小型かつ、操作保守が容易であり、実用上十分な精度を有するものである。

9.2 試作装置の演算基本式

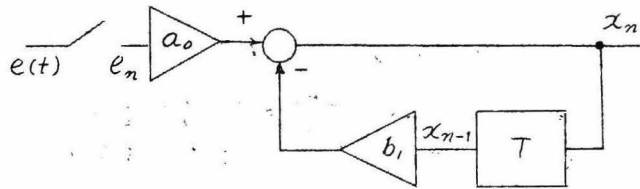
式(8.1)に示した制御装置のパルス伝達関数 $D_F^*(z)$ は図9.2に示すように、つぎの2つのパルス伝達関数 $D_S^*(z)$, $D_R^*(z)$ が従続接続されたものと考えることができる。すなわち、

$$D_F^*(z) = D_S^*(z) D_R^*(z) \quad (9.10)$$

ここに $D_S^*(z)$, $D_R^*(z)$ は、



$$(a) \quad x_n = a_0 e_n + a_1 e_{n-1}$$



$$(b) \quad x_n = a_0 e_n - b_1 x_{n-1}$$

図 9.1 ディレイ・ライン回路を用いた任意伝達関数発生装置の原理

$$D_S^*(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_s z^{-s}$$

$$D_r^*(z) = 1/(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r})$$

以上 (9.11)

$D_r^*(z)$ の出力パルス列

の z 変換を $Q^*(z)$ とし、つ

ぎのように表わされるものとする。

$$Q^*(z) = D_r^*(z) E^*(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots \quad (9.12)$$

$t = nt$ における $D_S^*(z)$ の出力、すなわち制御装置 $D_F^*(z)$ の出力 x_n は、

$$x_n = a_0 q_n + a_1 q_{n-1} + \dots + a_s q_{n-s} \quad (9.13)$$

式 (9.12), (9.13) 両式は式 (9.5) に示した漸化式を変形したものであり、試作せる制御装置はこの変形せる漸化式に基づいて動作するもので、実際に試作したものは、つぎに示すように分子分母共、 z^{-3} の項まで有するパルス伝達関数 $D_F^*(z)$ を実現することのできるものである。すなわち、

$$D_F^*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}} \quad (9.14)$$

ここに係数 a_i, b_j ($i, j = 0, 1, 2, 3$) の絶対値はすべて 1 より小とする。若し 1 より大なるものがあるときには a_i の最大項 a_{max} , b_i の最大項 b_{max} で各々分子分母の係数を除し、入力又は出力パルス列を a_{max}/b_{max} 倍しておけばよい。

式 (9.14) より式 (9.12), (9.13) に対応して、

$$\left. \begin{aligned} x_n &= a_0 q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} + a_3 q_{n-3} \\ q_n &= (e_n - b_1 q_{n-1} - b_2 q_{n-2} - b_3 q_{n-3}) / b_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

図 9.3 は式 (9.15) で表わされる論理演算を遂行するためのディレイ・ライン回路網である。

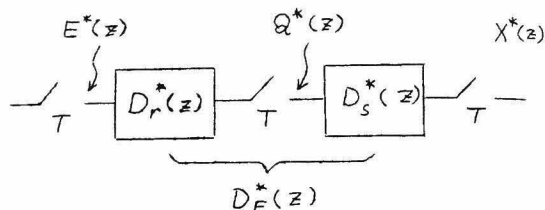


図 9.2 パルス伝達関数の従続接続

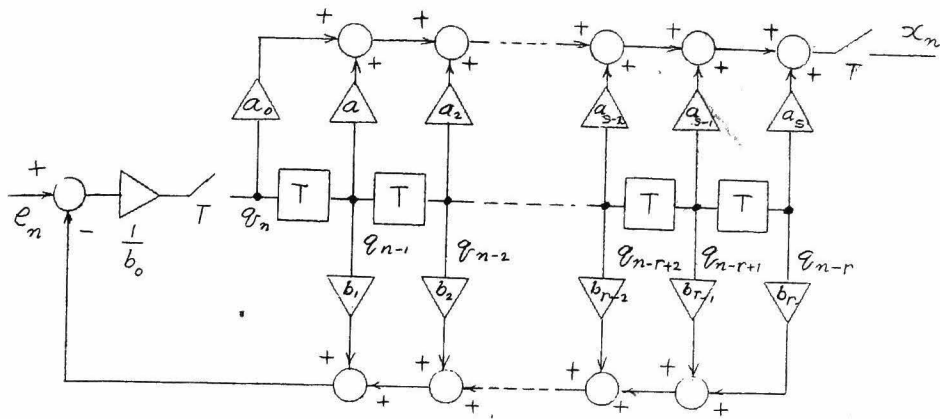


図 9.3 デレイ・ライン回路

9.3 主要部分結線図および主要構成要素

次頁図 9.5 は試作装置の主要部分の結線を示したものであり、図中 r_1, r_2, \dots, r_{12} は多接点リレーを表わし、各リレーが 1 サンプリグ期間中 1 回ずつ開路または閉路し、所定の論理演算を行う。各リレーの 1 サンプリグ期間中における動作順位は図 9.4 のタイム・チャート (time chart) に示す如くである。この順位によるリレー群の切換動作により図 9.5 に示したコンデンサ $C_1, C_2, \dots, C_{14}, C_d$ およびポテン

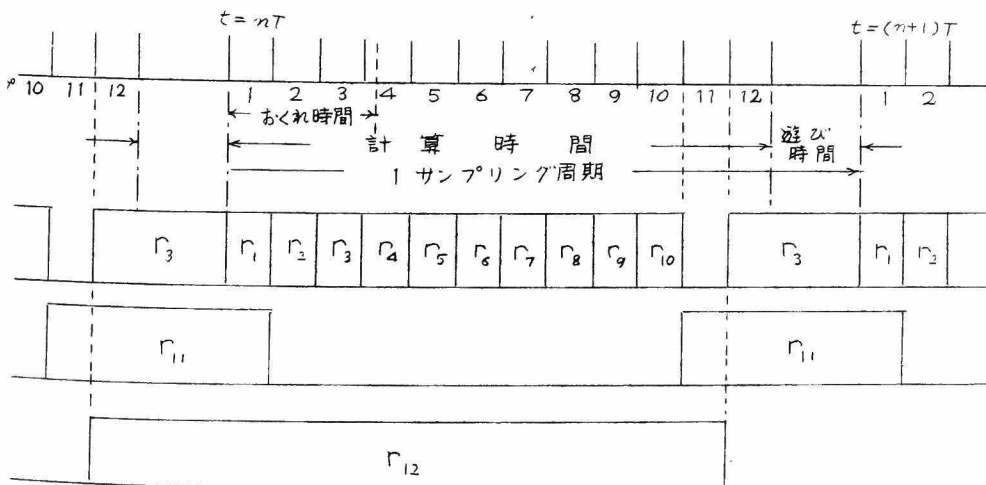


図 9.4 図 9.5 におけるリレー群動作順位タイムチャート

シヨメータ $a_0, a_1, \dots, a_3, b_1, b_2, b_3, \beta_k, \beta_d$ は図 9.6 に示す動作原理図に従ってそれぞれ所定の端子に接続される。(リレー r_i が動作している状態を第 i ステップと呼ぶことにする。)

図 9.5 に示した直流増巾巻は図 9.7 に示すように g_1, g_2, g_3 なる 3

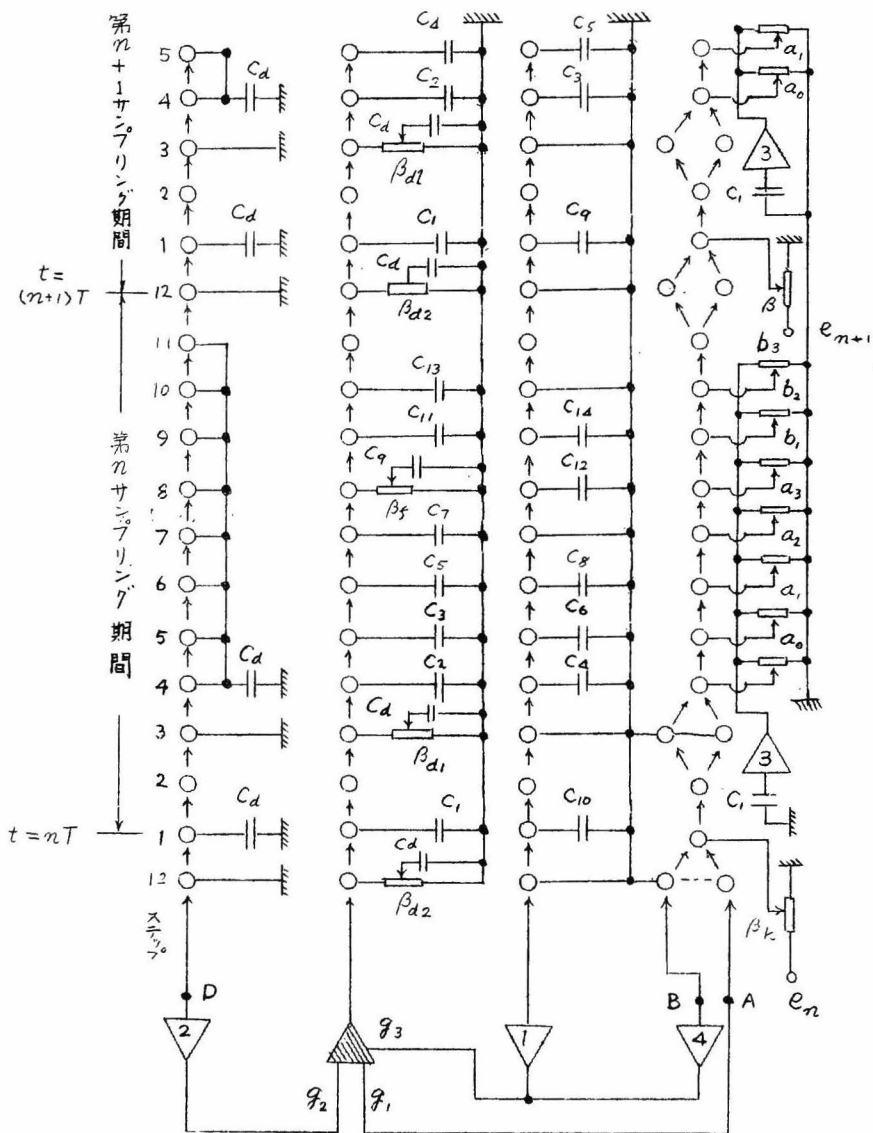


図 9.6 試作サンプル値制御装置動作原理図

— 22 —

シ

作

作

1

t-

つの入力端子を有する特殊構造のものである。増巾器のゲインが非常に大きい場合、直流増巾器出力 v_o はつぎの式で与えられる。

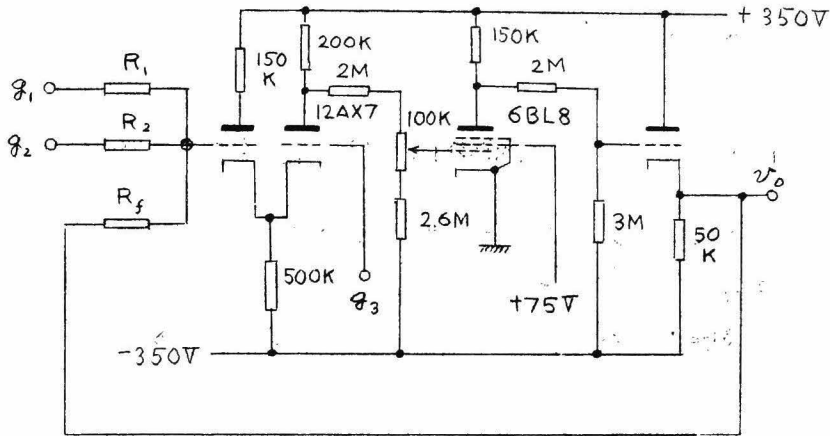


図 9.7 試作サンプル値制御装置に用いた直流増巾器

$$v_o = -\frac{R_f}{R_1} g_1 - \frac{R_f}{R_2} g_2 + R_f \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_f} \right) g_3 \quad (9.16)$$

本式で注意すべき点は、 g_1 および g_2 入力に対しては通例の直流増巾器におけるように入力電圧と逆符号の電圧が得られるが、 g_3 入力に対しては加えられた電圧と同符号の出力が得られることである。

図 9.5 および 9.6 に示したカソード・ホロワーは計算値記憶用コンデンサ C_1, C_2, \dots にそのグリッド回路がリレー接点を介して接続されるものであるため、グリッド電流、イオン

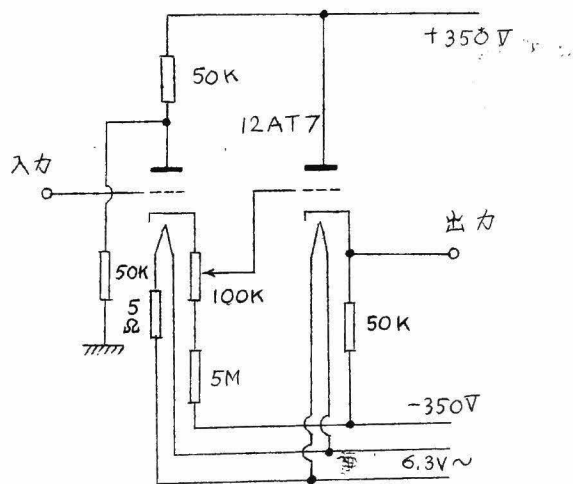


図 9.8 試作サンプル値制御装置に用いたカソード・ホロワー回路

電流を極力抑えるよう留意したもので、その回路を示したのが図 9.8 である。本カソード・ホロワーの入出力電圧ゲインはいずれも $\alpha = 0.920$ となっている。また、コンデンサの接がれるリレー接点は十分漏洩抵抗を高くするよう工夫した。

9.4 | サンプルング期間中における各演算ステップの動作

本節においては式 (9.15) に示した論理演算を遂行するために図 9.6 に示した各演算ステップがどのような動作をするかを各ステップ毎に説明する。なお説明をわかりやすくするため 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 12 ステップの順で行う。

(1) ステップ 4 $[nT < t < (n+1)T]$

本ステップにおいては、図 9.6 より演算回路は a_0 の符号が正のときには図 9.9 (a), 負のときには同図 (b) のようになる。(いまコンデンサ C_1 , C_4 の端子電圧がそれぞれ、

$$C_1 : -\frac{1}{\alpha} q_n, \quad C_4 : \frac{1}{\alpha} [a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} + a_3 q_{n-3}] \quad (9.17)$$

であったとする*。

端子 A, B, C からのゲインの絶対値が等しく、いずれも $1/\alpha$ であったとすれば、 C_2 に現われる電圧は

$$C_2 : \frac{1}{\alpha} [a_0 q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} + a_3 q_{n-3}] \quad (9.18)$$

したがって出力電圧 OUT は

$$\text{OUT} : a_0 q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} + a_3 q_{n-3} \equiv x_n \quad (9.19)$$

コンデンサ C_2 の端子電圧、したがって出力電圧は、つぎのサンプルング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ における第 4 ステップ になるまで

* C_d はドリフト補償のためのもので後述することとし、ここでは C_d の電圧はゼロと考えておく。

$$\frac{R_{f1}}{R_1} = \frac{1}{\alpha}, \quad 0.479 \left(1 + \frac{R_{f1}}{R_1} + \frac{R_{f1}}{R_2} \right) \beta_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (9.24)$$

となるよう R_1, R_{f1}, R_2 および β_0 を定めなければならない。本試作装置では R_{f1}, R_1 として、つぎのような値を採用した。

$$R_{f1} = 500 \text{ K}\Omega, \quad R_1 = \alpha R_{f1} = 460 \text{ K}\Omega \quad (\text{図 9.5 参照}) \quad (9.25)$$

R_2, β_0 については後に述べる。

(2) ステップ 5 $[nT < t < (n+1)T]$

本ステップにおける演算回路状態は図 9.9 において C_4 が C_6 に、 C_2 が C_3 に、 a_0 が a_1 に入れかわっただけである。 C_1, C_6 の端子電圧が各々、

$$C_1: -\frac{1}{\alpha} q_n, \quad C_6: \frac{1}{\alpha} [a_2 q_{n-1} + a_3 q_{n-2}] \quad (9.26)$$

であったとすると、 C_3 の電圧は式 (9.18) の場合と同様にして、

$$C_3: \frac{1}{\alpha} [a_1 q_n + a_2 q_{n-1} + a_3 q_{n-2}] \quad (9.27)$$

コンデンサ C_3 は後に述べるように、つぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 4 ステップにおいて、カソード・ホロワー No. 1 の入力に接続される。

(3) ステップ 6 $[nT < t < (n+1)T]$

図 9.9 の回路において C_4 の代りに C_8 が C_2 の代りに C_5 が、 a_0 の代りに a_2 が接続される。 C_1, C_8 の端子電圧が各々、

$$C_1: -\frac{1}{\alpha} q_n, \quad C_8: \frac{1}{\alpha} a_3 q_{n-1} \quad (9.28)$$

であったとすると、 C_5 の電圧は

$$C_5: \frac{1}{\alpha} [a_2 q_n + a_3 q_{n-1}] \quad (9.29)$$

コンデンサ C_5 はつぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 5 ステップにおいてカソード・ホロワー No. 1 の入力に接続される。

(4) ステップ 7 [$nT < t < (n+1)T$]

図 9.9 の回路においてカソード・ホロワー No. 1 の入力端子が接地され、 C_2 の代わりに C_7 が、 a_0 の代りに a_3 が接続される。 C_7 に現れる電圧は、

$$C_7: \frac{1}{\alpha} a_3 q_n \quad (9.30)$$

コンデンサ C_7 はつぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 6 ステップにおいてカソード・ホロワー No. 1 の入力に接続される。

(5) ステップ 8 [$nT < t < (n+1)T$]

図 9.9 の回路において、 C_4 の代りに C_{12}^* が、 C_2 の代りに C_9 が分圧比 β_f なる分圧回路を介して接続され、 a_0 の代りに b_{11} が接続される。分圧比 β_f はポテンショメータにより変更できるようになっている。

(β_f のきめ方については (9) に述べる) C_1, C_{12} の端子電圧が各々

$$C_1: -\frac{1}{\alpha} q_n, \quad C_{12}: \frac{1}{\alpha} [b_2 q_{n-1} + b_3 q_{n-2}] \quad (9.31)$$

であったとすると、コンデンサ C_9 に現れる電圧は、

$$C_9: \frac{\beta_f}{\alpha} [b_1 q_n + b_2 q_{n-1} + b_3 q_{n-2}] \quad (9.32)$$

コンデンサ C_9 はつぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 1 ステップにおいて、カソード・ホロワー No. 1 に接続される。

(6) ステップ 9 [$nT < t < (n+1)T$]

図 9.9 の回路において、 C_4 の代りに C_{14} が、 C_2 の代りに C_{11} が、 a_0 の代りに b_2 が接続される。 C_1, C_{14} の端子電圧が各々

$$C_1: -\frac{1}{\alpha} q_n, \quad C_{14}: \frac{1}{\alpha} b_3 q_{n-1} \quad (9.33)$$

であったとすると C_{11} に現れる電圧は、

$$C_{11}: \frac{1}{\alpha} [b_2 q_n + b_3 q_{n-1}] \quad (9.34)$$

コンデンサ C_{11} はつぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 8 ステップにおいて、カソード・ホロワー No. 1 に接続される。

* C_{10} でないことに注意

(7) ステップ 10 [$nT < t < (n+1)T$]

図 9.9 の回路において、カソード・ホロワー No. 1 の入力端子が接地され C_2 の代りに C_{13} が、 a_0 の代りに b_3 が接続される。 C_{13} に現れる電圧は、

$$C_{13}: \frac{1}{\alpha} b_3 q_n$$

コンデンサ C_{13} は、つぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 9 ステップにおいて、カソード・ホロワー No. 1 に接続される。

(8) ステップ 11 [$nT < t < (n+1)T$]

本ステップにおいてはリレー r_{11} が働き、直流増幅器フィード・バック抵抗を、 R_{f2} に、 g_3 入力分圧抵抗比を β_1 に切換え、A, B, C 端子よりのゲインを G/α に変更する。本ステップはゲイン切換え以外演算操作には関係しない。 r_1 はつぎのサンプリング期間 $(n+1)T < t < (n+2)T$ の第 2 ステップにおいてリレー r_2 により復帰せしめられ、A, B, C からのゲインを今迄通り $1/\alpha$ に戻す。(図 9.4 参照)

(9) ステップ 1 [$(n+1)T < t < (n+2)T$]

本ステップにおける演算回路は図 9.10 のようになる。ステップ 11 の操作により A, B, C 各端子よりのゲインは G/α に切換えられており、 C_9 の端子電圧はステップ 8 において、

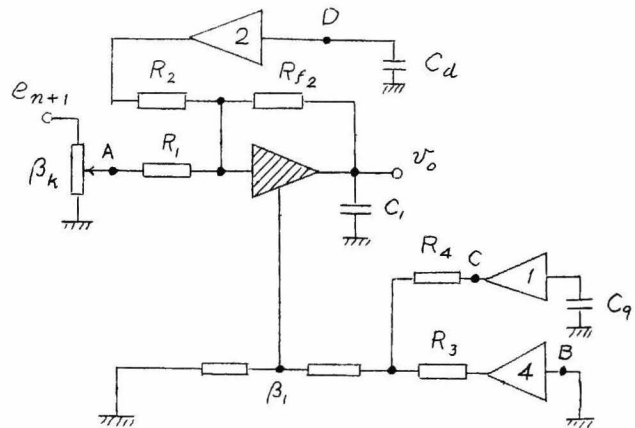


図 9.10 ステップ 1 における演算回路

C_9 :

$$\frac{\beta_f}{\alpha} [b_1 q_n + b_2 q_{n-1} + b_3 q_{n-2}]$$

に充電されているから、コンデンサ C_1 に現れる電圧は入力が e_{n+1} で

あったとすると

9.36

$$C_1: -\frac{G}{\alpha} \beta_k e_{n+1} + \frac{G}{\alpha} \beta_f [b_1 q_n + b_2 q_{n-1} + b_3 q_{n-2}] \quad (9.36)$$

式(9.15)を参照することにより、

9.37

$$G \beta_k = G \beta_f = \frac{1}{b_0} \quad (9.37)$$

を満足するよう G および β_k, β_f をえらぶことにより、

$$C_1: -\frac{1}{\alpha \beta_0} [e_{n+1} - b_1 q_n - b_2 q_{n-1} - b_3 q_{n-2}] = -\frac{1}{\alpha} q_{n+1} \quad (9.38)$$

式(9.17), (9.38) を比較することにより、 C_1 の内容は1サンプリング進んだことがわかる。

9.39

式(9.16), (9.23)より、

$$v_0 = -\frac{R_{f2}}{R_1} \beta_k e_{n+1} + 0.479 \left(1 + \frac{R_{f2}}{R_1} + \frac{R_{f2}}{R_2} \right) \beta_1 v_c \quad (9.39)$$

であるから

$$\frac{R_{f2}}{R_1} \beta_k = \frac{1}{\alpha b_0}, \quad 0.479 \left(1 + \frac{R_{f2}}{R_1} + \frac{R_{f2}}{R_2} \right) \beta_1 \beta_f = \frac{1}{\alpha b_0} \quad (9.40)$$

が成立すればよい。いま、

$$R_{f2} = m R_{f1}, \quad m = 1, 2, 5, 10, 20 \quad (9.41)$$

とえらば式(9.25)より、 $R_{f1} = 500 \text{ K}\Omega$ であるから、

$$R_{f2} = 500 \text{ K}\Omega (m=1), \quad 1 \text{ M}\Omega (m=2), \quad 2.5 \text{ M}\Omega (m=5) \\ 5 \text{ M}\Omega (m=10), \quad 10 \text{ M}\Omega (m=20) \quad (9.42)$$

となる。(図 9.5 参照) また、

$$\alpha \frac{R_{f2}}{R_1} = \alpha m \frac{R_{f1}}{R_1} = m \quad \text{したがって}$$

$$\beta_k (= \beta_f) = (1/b_0)/m \quad (9.43)$$

すなわち、 $(1/b_0) > 1$ なる場合には m の値、したがって R_{f2} を適当にえらび、 $\beta_k (= \beta_f) \leq 1$ になるようにしてポテンショメータ β_k, β_f をセットする。式(9.41), (9.43)を式(9.40)に用いることにより、

$$0.479 \left(\alpha + m + m \frac{R_{f1}}{R_2} \alpha \right) \beta_1 = m \quad (9.44)$$

$m = 20$ ($R_{f2} = 10 \text{ M}\Omega$) のとき、 $\beta_1 = 1$ となるよう R_2 をえらべば、

$$0.479 \left(\alpha + 20 + 20 \times 0.5 \alpha \times \frac{1}{R_2} \right) = 20 \quad (9.45)$$

すなわち、

$$R_2 = \frac{4.79}{10.42 - 0.479 \alpha} \quad (\text{M}\Omega) \quad (9.46)$$

いま、若し $R_2 < R_1$ ($= 0.46 \text{ M}\Omega$) なる結果をうれば R_2 としてその値を使用し、 $R_2 > R_1$ なる場合には $R_2 = R_1 = 0.46 \text{ (M}\Omega)$ とえらび、 β_1 はつぎの式により決定する*。

$$\beta_1 = \frac{20}{0.479(40 + \alpha)} \quad (9.47)$$

本試作装置においては $\alpha = 0.920$ であるから、

$$R_2 = 0.442 \text{ (M}\Omega) < R_1 \quad (\text{図 9.5 参照}) \quad (9.48)$$

また $m = 1, 2, 5, 10, 20$ の場合に対する β_1 の値は式 (9.44) より、

$$\beta_1 = 0.705 \text{ (} m=1 \text{)}, \quad 0.835 \text{ (} m=2 \text{)}, \quad 0.938 \text{ (} m=5 \text{)} \\ 0.979 \text{ (} m=10 \text{)}, \quad 1 \text{ (} m=20 \text{)} \quad (9.49)$$

分圧抵抗の全抵抗値を R_3, R_4 に比べ十分大きく、 $2 \text{ M}\Omega$ にえらべば各分圧抵抗値はつぎのようになる。(図 9.5 参照)

$$1.410 \text{ M}\Omega \text{ (} m=1 \text{)}, \quad 1.670 \text{ M}\Omega \text{ (} m=2 \text{)}, \quad 1.876 \text{ M}\Omega \text{ (} m=5 \text{)} \\ 2 \text{ M}\Omega \text{ (} m=20 \text{)} \quad (9.50)$$

(10) ステップ 2

本ステップはリレー R_2 の切きにより r_{11} を復帰せしめ、A, B, C からのゲインを再び $1/\alpha$ に戻す。演算操作には関係しない。

(11) ステップ 3

* $R_2 < R_1$ の場合、 $R_2 = R_1$ として β_1 をきめると、分圧抵抗比 β_1 が 1 より大となり、設計不可能となる。

本ステップは A, B, C からのゲインが $1/\alpha$ であるステップ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 の各演算期間に対し、直流増巾器、カソード・ホロワー No. 1, No. 2, No. 4 のドリフト電圧による誤差を補償するため、図 9.11 の回路でドリフト電圧をコンデンサ C_d に充電し、上記演算ステップ中、D 端子に加えるために設けられたものである。

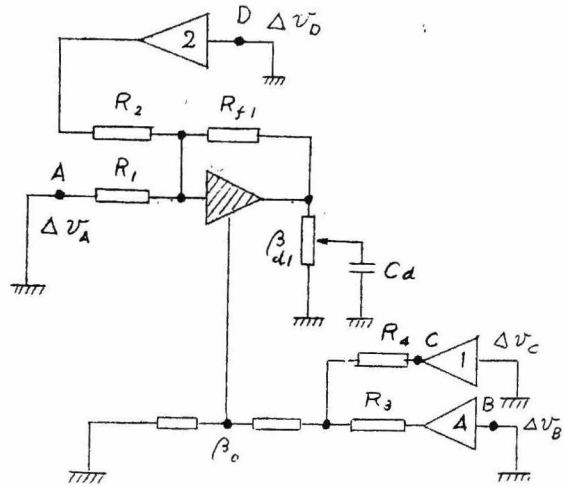


図 9.11 ステップ 3 における演算（ドリフト補償動作）回路

いま、ドリフト電圧 Δv_0 を入力 A, B, C, D 側に換算し、 Δv_A , Δv_B , Δv_C , Δv_D が考えられるものとする。すなわち、

$$\Delta v_0 = -\frac{1}{\alpha} \Delta v_A - \frac{R_{f1}}{R_2} \alpha \Delta v_D + \frac{1}{\alpha} \Delta v_B + \Delta v_C \quad (9.51)$$

ここで、このドリフト電圧 Δv_0 を打消すため、D 端子に更に $\Delta v_D'$ を加えるものとする。すなわち、

$$0 = -\frac{1}{\alpha} \Delta v_A - \frac{R_{f1}}{R_2} \alpha \Delta v_D - \frac{R_{f1}}{R_2} \alpha \Delta v_D' + \frac{1}{\alpha} \Delta v_B + \Delta v_C$$

$$\Delta v_D' = \frac{R_2}{\alpha R_{f1}} \left[-\frac{1}{\alpha} \Delta v_A - \frac{R_{f1}}{R_2} \alpha \Delta v_D + \frac{1}{\alpha} \Delta v_B + \Delta v_C \right] = \frac{R_2}{\alpha R_{f1}} \Delta v_0 \quad (9.52)$$

ところが $R_2/\alpha R_{f1} = 0.961$ であるから、

$$\beta_{d1} = 0.961 \quad (\text{図 9.5 参照}) \quad (9.53)$$

(12) ステップ 12

A, B, C からのゲインが $1/\alpha \beta_0$ なるステップ 1 に対し上記ドリフト補償を行う。本ステップの回路は図 9.11 において C_d 充電用分圧抵抗

を β_{d2} におきかえたものになる。

$$0 = -\frac{1}{\alpha b_0} \Delta v_A - \frac{R_{f2}}{R_2} \alpha \Delta v_D - \frac{R_{f2}}{R_2} \alpha \Delta v_D' + \frac{1}{\alpha b_0} \Delta v_B + \frac{1}{b_0} \Delta v_C$$

$$\therefore \Delta v_D' = \frac{R_2}{\alpha R_{f2}} \Delta v_0 \quad (9.54)$$

$$\therefore \beta_{d2} = 0.961 (m=1), \quad 0.481 (m=2), \quad 0.192 (m=5)$$

$$0.0961 (m=10), \quad 0.0481 (m=20) \quad (9.55)$$

ドリフト補償用ステップ 3, 12 は (R_{f1}, R_{f2}) , (β_0, β_1) 切換と同様リレー r_{11} の働きにより1つの分圧抵抗回路で行なうことができる(図 9.5 参照)。

また、本ステップでは図 9.4 タイム・チャートに示すように、 r_{12} の開閉の状態が1サンプリング毎に交代し、 $C_9 \leftrightarrow C_{10}$, $C_3 \leftrightarrow C_4$, $C_5 \leftrightarrow C_6$, なる切換を行い、式(9.15)に示した漸化式を1段階ずつ進める向きをする。

9.5 各ステップの長さと演算時間

前節の説明より明らかなように、ステップ1において入力サンプル値 e_n がサンプルされ、出力サンプル値 x_n がカソード・ホロワー No. 5 出力に現れるまでには2ステップ $< T_D < 3$ ステップの時間遅れがある。(図 9.4 参照) この計算おくれをできるだけ少なくするには、タイム・チャート図 9.4 に示したように1つのステップの長さはリレーの動作時間、コンデンサの充電時間等で制限される最小の時間に定め、12のステップを終った後の時間は準備時間(stand-by time)としてつぎのサンプリング時点まで装置は静止の状態におく。

本試作装置においてはサンプリング周期毎のパルスにより12個のリレー群が将棋倒し式に自動的に各ステップの動作を行い、以後つぎのパルスが来るまで停止するようになっている。^{*(233頁脚註)}

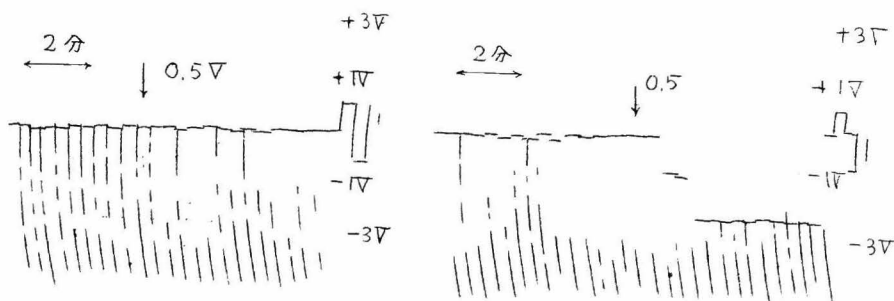
9.6 特性計算例

(1) 負荷特性

本装置は $50\text{ k}\Omega$ 程度の負荷状態においては約 $\pm 60\text{ V}$ の出カレベルが許容される。

(2) ドリフト補償特性

図 9.12 はドリフト補償回路の効果を示したものである。同図(a)



(a) 補償回路有り

(b) 補償回路無し

図 9.12 ドリフト補償特性

はドリフト補償回路を動作状態において無入力状態でD端子カソード・ホロワーの零バランスを約 0.5 V 突変させたときの応答で、同図(b)はドリフト補償回路を不動作状態におき、(コンデンサー C_{d1}, C_{d2} を短絡すればよい) 同じ実験を行ったものである。

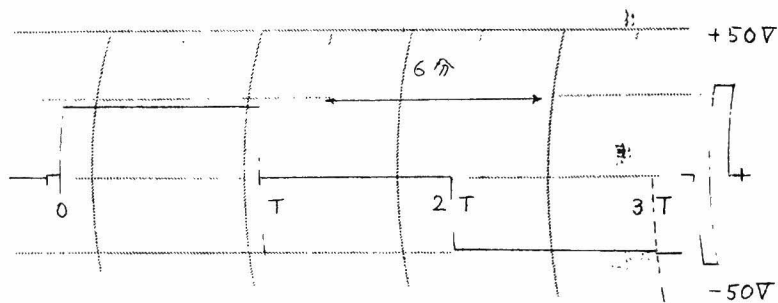
(3) ホールド特性

図 9.13 はホールド特性をみるため $T=6$ 分にえらび、 $D_F^*(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2}$ ($a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0, b_0 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = 0$) のステップ応答を記録したものである。

(4) $D_F^*(z)$ のステップおよびインパルス応答

以下に示す記録データは各種の $D_F^*(z)$ につき、そのステップおよびインパルス応答を示したものである。

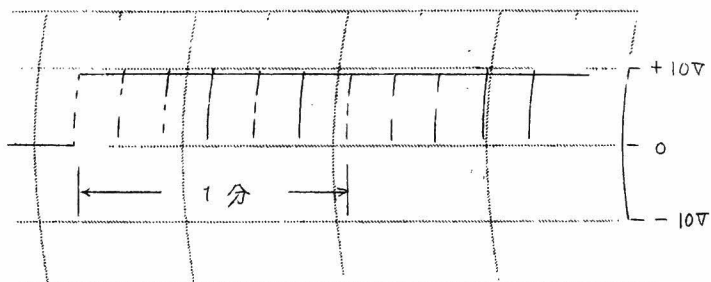
* リレー群駆動回路については附録 12 参照。



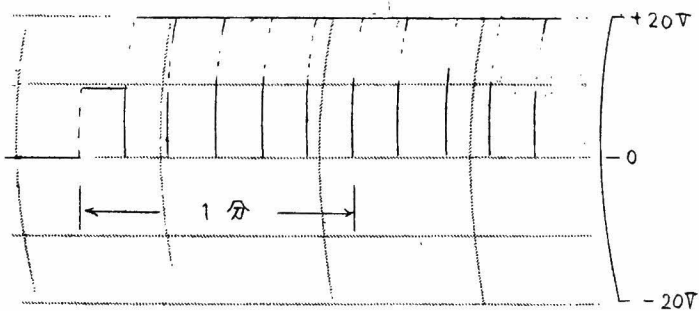
ホールド特性 ($D_F^*(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2}$ のステップ応答)

図 9 13 ホールド特性

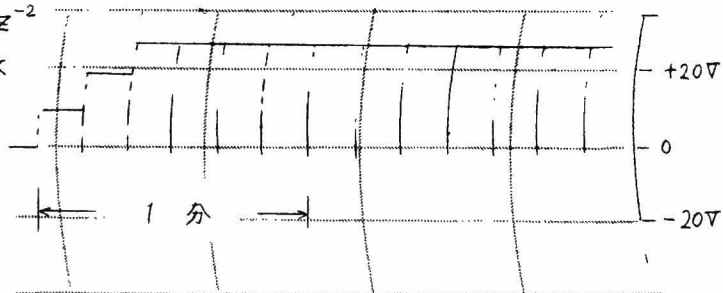
i) $D_F^*(z) = 1$ の
ステップ応答



ii) $D_F^*(z) = 1 + z^{-1}$ の
ステップ応答

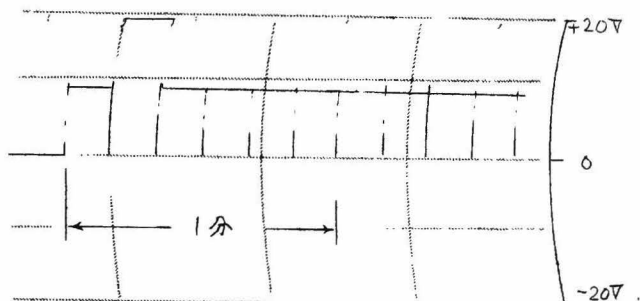


iii) $D_F^*(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$ の
ステップ応答



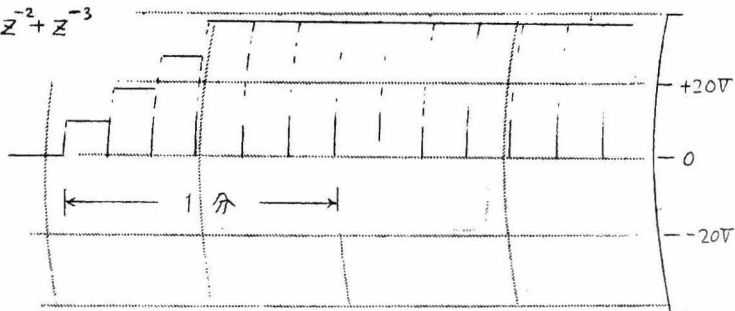
iv) $D_F^*(z) = 1 + z^{-1} - z^{-2}$

のステップ応答



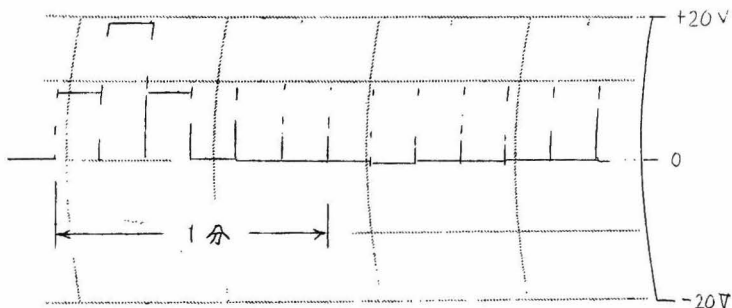
v) $D_F^*(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

のステップ応答



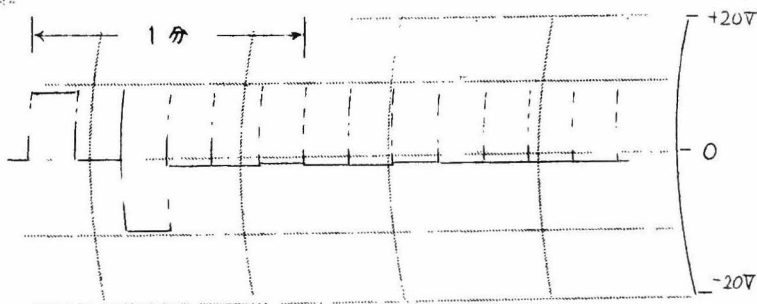
vi) $D_F^*(z) = 1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}$

のステップ
応答



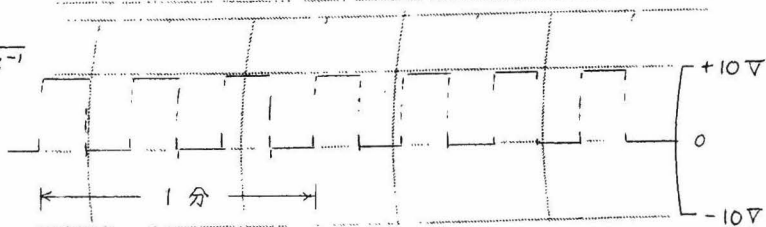
vii) $D_F^*(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}$

の
ステップ
応答

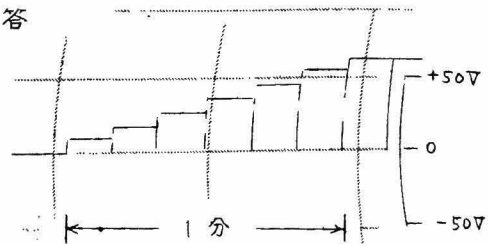


viii) $D_F^*(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}$

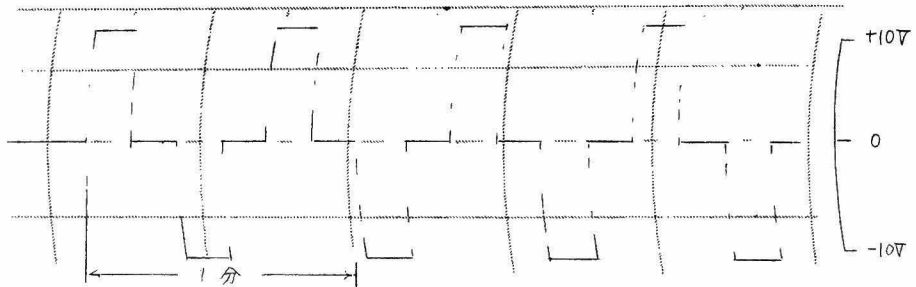
のステップ
応答



ix) $D_F^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ のステップ応答



x) $D_F^*(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}$ のインパルス応答

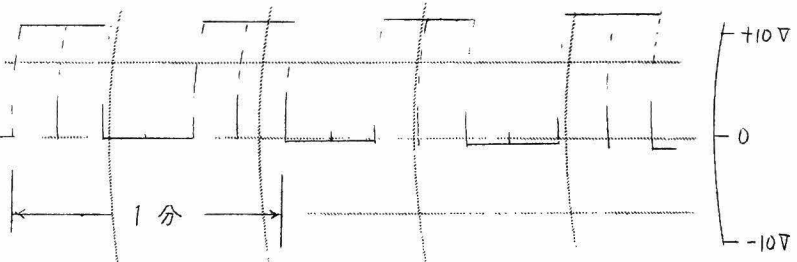


xi) $D_F^*(z)$

$$= \frac{1}{1+z^{-2}}$$

のステッ

プ応答

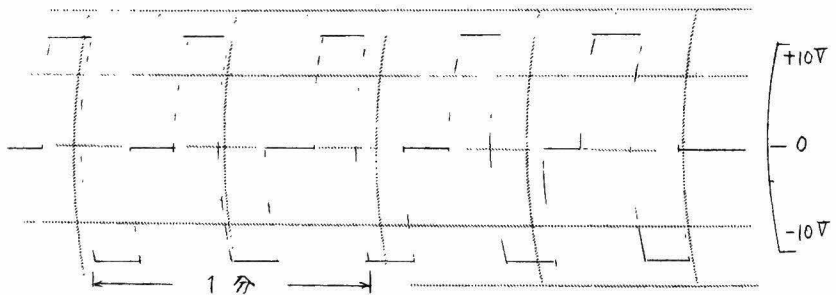


xii) $D_F^*(z)$

$$= \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

のインパル

ス応答

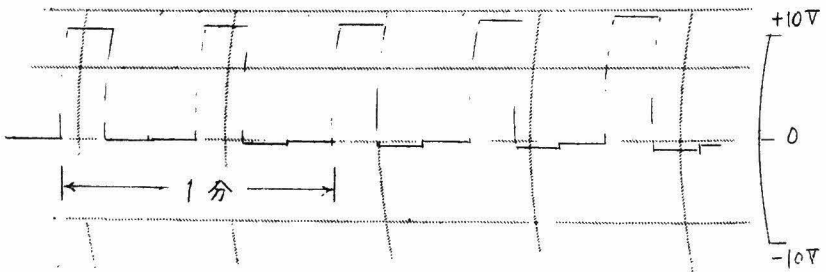


xiii) $D_F^*(z)$

$$= \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

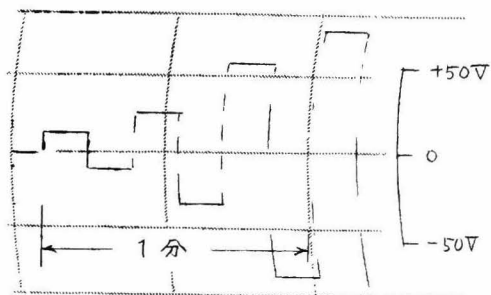
のステッ

プ応答



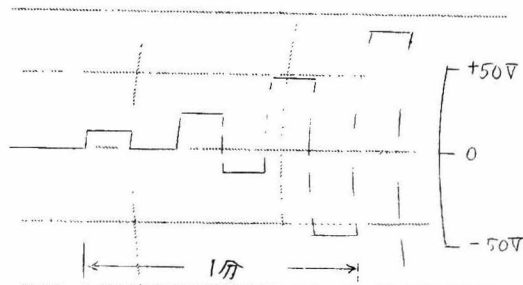
xiv) $D_F^*(z) = \frac{1}{1+z^{-1}-z^{-2}}$

のインパルス応答



xv) $D_F^*(z) = \frac{1}{1+z^{-1}-z^{-2}}$

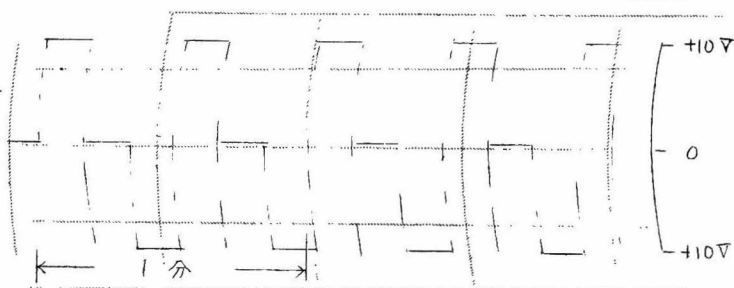
のステップ応答



xvi)

$D_F^*(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$

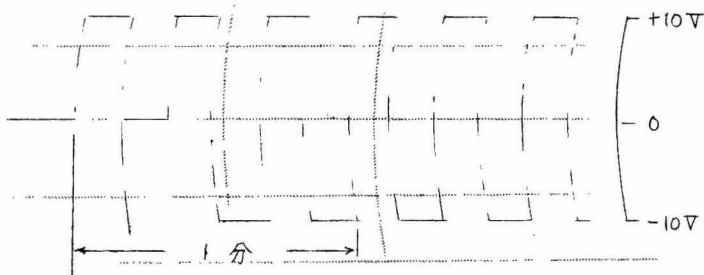
のインパルス
応答



xvii)

$D_F^*(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}}$

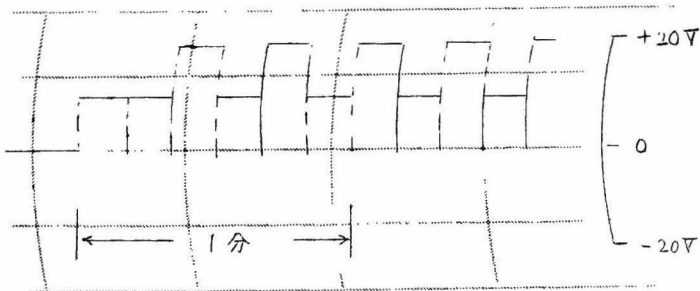
のインパルス応答



xviii)

$D_F^*(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}}$

のステップ応答



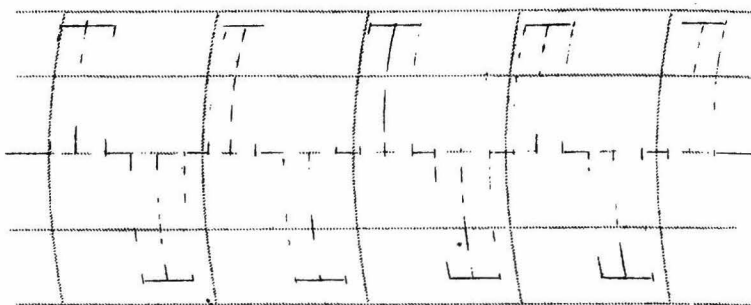
xix)

$$D_F^*(z)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

のインパルス

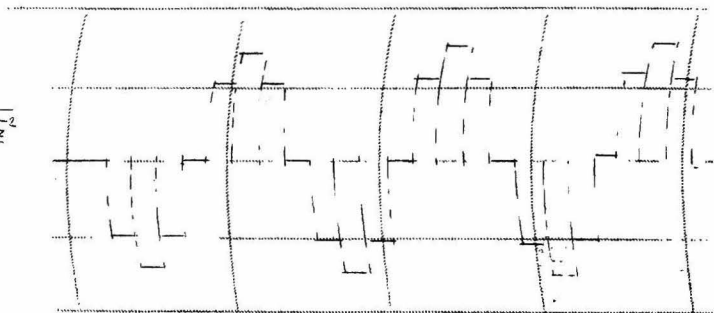
応答



xx) $D_F^*(z)$

$$= \frac{z^{-1}}{0.707 - z^{-1} + 0.707 z^{-2}}$$

のインパルス応答

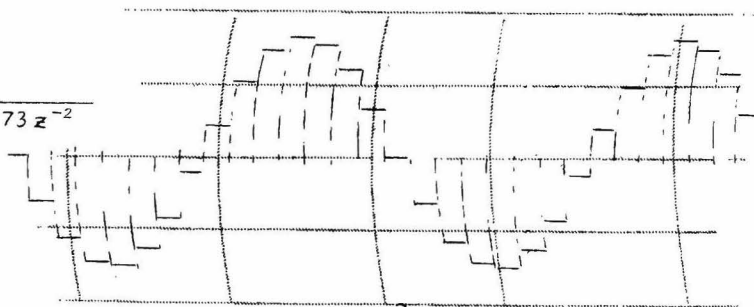


xxi) $D_F^*(z)$

$$= \frac{z^{-1}}{0.573 - z^{-1} + 0.573 z^{-2}}$$

のインパルス

応答



以上 図 9.14

第10章 多重サンプル値制御装置

10.1 多重制御を適用する系および、外乱の概要

本章においてはサンプル値制御の実際面への応用として、サンプル値多重制御の例を説明する。

多重制御を実施しようとする対象は、図 10.1 に示すようなポリスチロール芯線被覆機のキャパシタンス制御系で、特に製品の単位長当りのキャパシタンスを小さくするため、被覆材料に発泡剤が含まれている場合、熔融状態、冷却水温度、巻取速度の変化等により製品として得られる被覆線の単位長当りのキャパシタンス変動が多くなる。これを、あるキャパシタンス設定値の前後 $\alpha\%$ におさえるため 図に示すような連続三項動作調節計が用いられる。

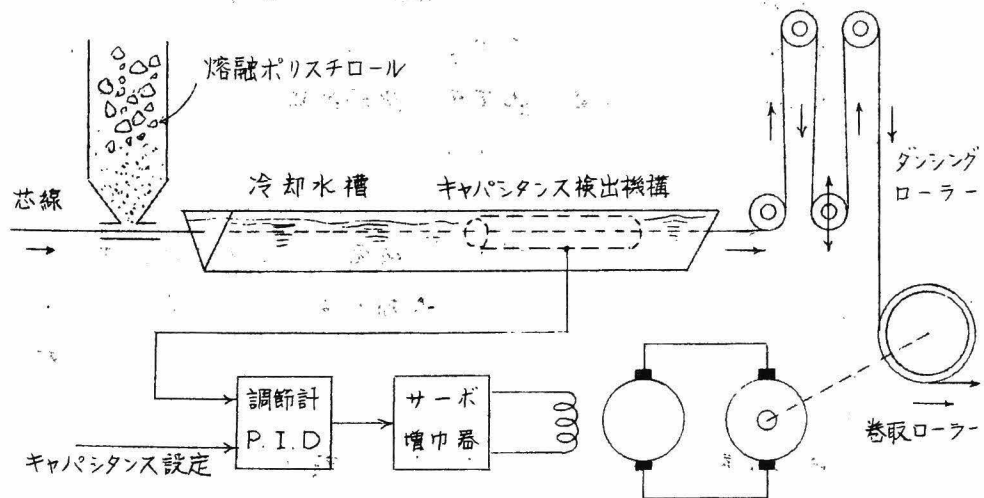


図 10.1 芯線被覆機のキャパシタンス制御系（連続制御系）

実際の製造過程においては、この様な系が多数並列運転されることになり、各系に対しそれぞれ調節計および、その操作者が必要となり、経済上および、製造工程の中央管理の面から、はなはだ不都合である。そ

こで、これら多くの系に対し、1台の多重サンプル値制御装置で並列制御を行い、所要調節計の数を減らすことと共に、全体の管理を容易にすることを目的として開発したものである。

図 10.2 は図 10.1 のキャパシタンス制御系を等価ブロック図で示したものである。

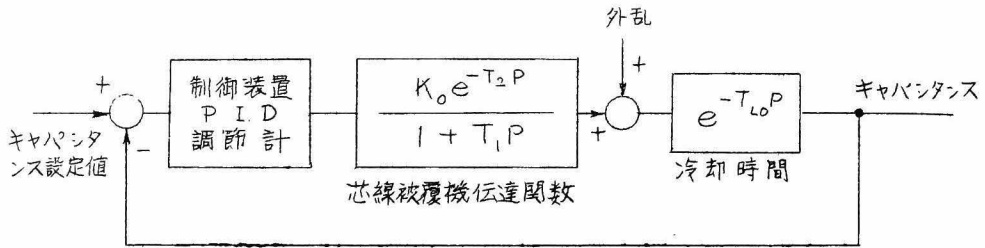


図 10.2 図 10.1 の系の等価ブロック図

サンプル値制御を実施する場合考えなければならないことは連続調節計を使用する場合と同様、どのような制御方式を採用するかという基本問題の外、更にサンプリング周期の選定をいかにするかという問題がある。前者に対しては、従来実施されて来た連続制御における経験、および、装置をできるだけ簡単にして信頼性を持たせる意味から、サンプル値制御用制御装置 $D_F^*(z)$ として、 $D_F^*(z) = K_c / (1 - z^{-1})$ ($a_0 = K_c$, $b_1 = 1$, 近似 PI 制御と仮称) を採用し、後者、すなわちサンプリング周期 T および K は被覆材料の熔融状態、冷却水温度変化、発泡の不規則性等に起因する外乱のパワー・スペクトルをもとにし、この外乱に対する出力 (キャパシタンス) 自乗平均を最小にするよう決定した。^{*}

なお、本試作装置は実用装置として十分な信頼性を持たせるため、各制御系に共通に使用される要素に十分の注意をはらうと共に、個々の制御系にのみ専属して用いられる制御装置構成要素に対しても、一部の制御系の運転休止、故障等の場合に対処するため、これら構成要素をプラグ・イン (plug in) 式にして予備を用意できるようにするなどの考り

^{*} 制御系各部のパラメータ、センセシスされたサンプリング周期、ゲイン、巻取速度等は研究委託会社の要請により明記することをさけた。

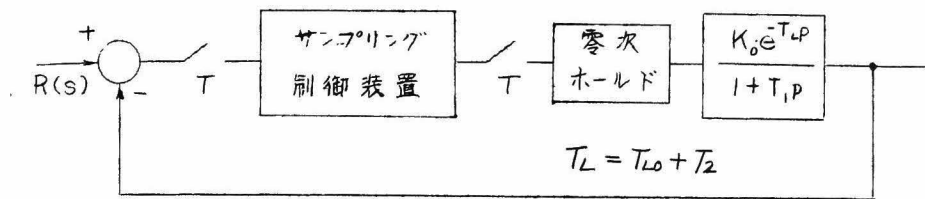


図 10.3 基本サンプル値制御系のブロック図

よを行なっている。

図 10.3 は 1 つの制御系に対する基本制御ブロック図である。また外乱 $x(t)$ に対する等価ブロック図は図 10.4 のようになる。

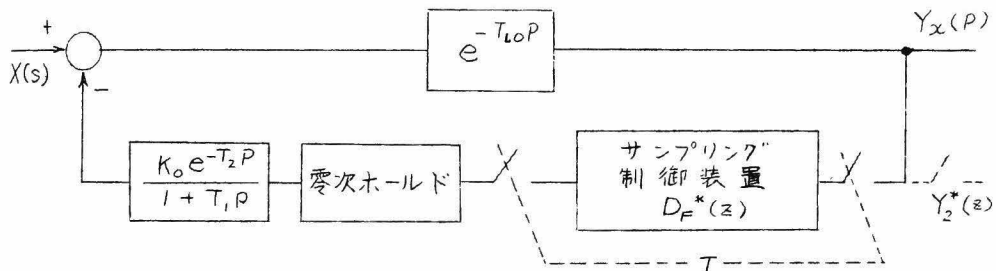


図 10.4 外乱に対する等価ブロック図

10.2 信号、時間の無次元化および基本式

系の有する全むだ時間 T_L ，芯線被覆機のゲイン K_o をそれぞれ、時間基準単位、信号基準単位として、時間および制御系各部の信号の無次元化を行なえば、

$$\begin{aligned} \text{無次元化された時定数} \quad \tau_i &= T_i / T_L & \frac{1}{T_L} s &= p \\ \text{サンプリング周期} \quad \tau_s &= T / T_L \end{aligned} \quad (10.1)$$

したがって

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1 + \tau_1 s}, \quad H(s)G(s) = \frac{T_L(1 - e^{-s\tau_s})}{s} \frac{e^{-s}}{1 + \tau_1 s} \quad (10.2)$$

$H(s)G(s)$ の z 変換は $T_L = nT + T_L'$ ($n=0, 1, 2, \dots, 0 \leq T_L' < T$) とすれば、

$$Z[H(s)G(s)] = \frac{z^{-(n+1)} \left[\left(1 - e^{-\frac{\tau_s - (1-n)\tau_s}{\tau_1}}\right) - \left(e^{-\frac{\tau_s}{\tau_1}} - e^{-\frac{\tau_s - (1-n)\tau_s}{\tau_1}}\right) z^{-1} \right]}{1 - e^{-\frac{\tau_s}{\tau_1}} z^{-1}} \quad (10.3)$$

図 10.3 および 10.4 の等価ブロック図よりつぎの関係式をうる。

目標値入力 (キャパシタンス設定値) $R(s)$ に対する系の出力 $Y_r(s)$ の z 変換を $Y_r^*(z)$ とすれば、

$$Y_r^*(z) = \frac{D_F^*(z)HG^*(z)}{1 + D_F^*(z)HG^*(z)} R^*(z), \quad HG^*(z) = Z[H(s)G(s)] \quad (10.4)$$

また、外乱 $X(s)$ に対する出力 $Y_x(s)$ の z 変換を $Y_x^*(z)$ とすれば

$$Y_x^*(z) = \frac{Z[G_2(s)X(s)]}{1 + D_F^*(z)HG^*(z)}, \quad G_2(s) = e^{-\frac{\tau_0}{T_L}s} \quad (10.5)$$

10.3 サンプルング周期に対する吟味

図 10.6 における破線はここでとりあつかうキャパシタンス制御系における外乱のスペクトル密度関数の代表的なものを示したもので、実線はこれを簡単な関数で近似したものである。ここでは、この外乱に対する出力応答の自乗平均を最小にするには、サンプルング周期を如何にえらぶべきかを検討する。

いま、図 10.5 のサンプル値系における入出力パルス列をそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} y^*(\tau) &= y(0)\delta(\tau) + y(\tau_s)\delta(\tau - \tau_s) + \cdots \\ x^*(\tau) &= x(0)\delta(\tau) + x(\tau_s)\delta(\tau - \tau_s) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

と表わすものとする。この系において、連続出力 $y(\tau)$ が定常的 (stationary) で、かつエルゴード性 (ergodic) にしたがるランダム信号であるとすると、 $y(\tau)$ の自己相関関数は任意のサンプルング周期 τ_s 毎のサンプル値の平均でおきかえることができる。すなわち $y(\tau)$ の自己相関関数を $\varphi_{yy}(\tau)$ とすれば、

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}(\tau) &= \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} y(\tau') y(\tau' + \tau) d\tau' \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(n\tau_s) y(n\tau_s + \tau) \quad (10.7)\end{aligned}$$

上式で $\tau=0$ とおけば、

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} y(\tau')^2 d\tau' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(n\tau_s)^2 \quad (10.8)$$

すなわち

$$\overline{y(\tau)^2} = \overline{y(n\tau_s)^2} \quad (10.8')$$

すなわち、連続信号 $y(\tau)$

の自乗平均 $\overline{y(\tau)^2}$ は、そ

のサンプル値の自乗平均

$\overline{y(n\tau_s)^2}$ を計算すること

により得られることになる。

$\overline{y(n\tau_s)^2}$ はつぎの式で

計算される。

$$\overline{y(n\tau_s)^2} = \overline{y(\tau)^2} = \frac{\tau_s}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) G^*(z^{-1}) S_{xx}^*(z)^{-1} dz \quad (10.9)^*$$

上式における $S_{xx}^*(z)$ は入力（外乱）信号 $x(\tau)$ を周期 τ_s でサンプリングした場合得られるパルス列のサンプル値パワー・スペクトル密度（sampled-power spectral density）を表わす。 $x(\tau)$ に関する情報、すなわち、連続信号 $x(\tau)$ のパワー・スペクトル密度 $S_{xx}(s)$ より $S_{xx}^*(z)$ を求めるにはつぎのようになる。

いま、連続関数 $x(\tau)$ の自己相関関数を $\varphi_{xx}(\tau)$ とすれば、スペクトル密度 $S_{xx}(s)$ は衆知のように、

$$* \overline{y(\tau)^2} = \frac{\tau_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^*(e^{j\omega\tau_s}) G^*(e^{-j\omega\tau_s}) S_{xx}^*(e^{j\omega\tau_s}) d\omega\tau_s$$

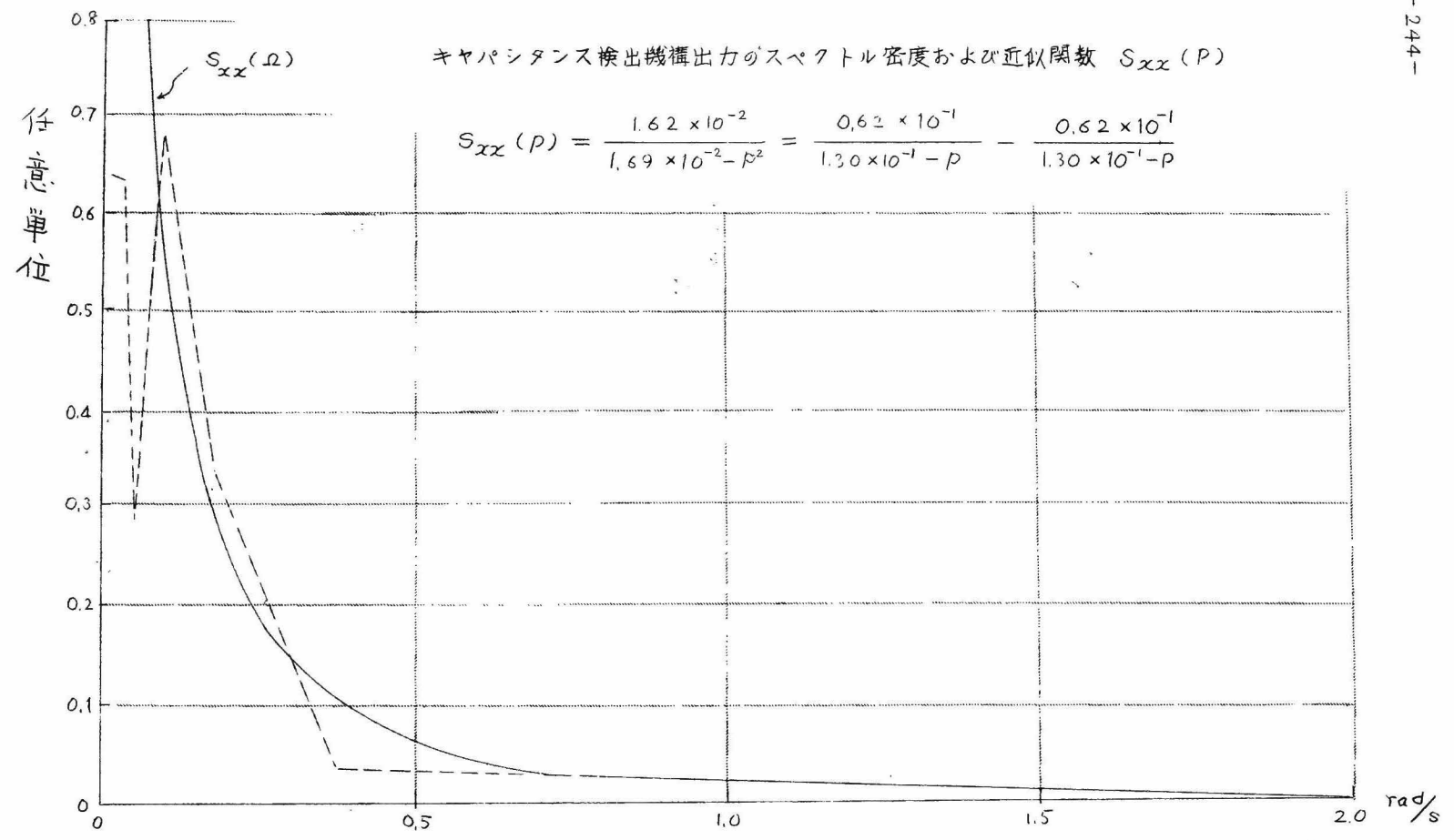


図 10.6 実測外乱 (キャパシタンス モニター) パワースペクトル (破線)
および近似曲線 (実線)

($p = j\Omega$)

$$S_{xx}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-\tau s} d\tau + \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\sigma) e^{\sigma s} d\sigma$$

$$\equiv X(s) + X(-s) \quad (10.10)^{**}$$

与えられる。\$X(s)\$ が求めれば \$S_{xx}^*(z)\$ は、

$$S_{xx}^*(z) = \frac{1}{2\pi j \tau_s} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\lambda) \frac{1 - e^{-2\tau_s \lambda}}{[1 - e^{-\tau_s(s-\lambda)}][1 - e^{-\tau_s(s+\lambda)}]} d\lambda \Big|_{e^{\tau_s s} = z}$$

$$(10.11)^{**}$$

式(10.11)の積分は\$X(s)\$が虚軸および、その右半面に極を持たない場合には虚軸自身になる。図10.6は、さきに述べたように実測された\$x(\tau)\$のパワー・スペクトル密度を普通の座標軸にえがいたもので、これに対し、\$S_{xx}(p)\$を

$$S_{xx}(p) = \frac{2K_i \omega_i}{\omega_i^2 - p^2} = \frac{K_i}{\omega_i + p} + \frac{K_i}{\omega_i - p} \equiv X(p) + X(-p) \quad (10.12)$$

$$\text{と仮定し、} \quad X(s) = \frac{K_i \tau_L}{\tau_L \omega_i + s} \equiv \frac{K_i'}{\omega_i' + s} \quad \begin{matrix} K_i' = K_i \tau_L \\ \omega_i' = \tau_L \omega_i \end{matrix}$$

$$K_i = 0.62 \times 10^{-1}, \quad \omega_i = 1.30 \times 10^{-1}$$

とえらば、同図実線のように近似される。

$$\therefore S_{xx}^*(z) = \frac{K_i}{\tau_s} \frac{1 - e^{-2\tau_s \omega_i}}{[1 - e^{-\tau_s \omega_i} z^{-1}][1 - e^{-\tau_s \omega_i} z]} \quad (10.13)^*$$

式(10.9)の積分を行うには\$z=(1+\alpha)/(1-\alpha)\$なる双1次変換(bilinear transform)を行い、\$z\$平面単位円内を\$\alpha\$-平面虚軸左半面に写像し、計算するのが便利である。すなわち、

$$\overline{y(n\tau_s)^2} = \overline{y(\tau)^2} = \frac{\tau_s}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} G^*(\alpha) G^*(-\alpha) S_{xx}^*(\alpha) \frac{2}{1-\alpha^2} d\alpha$$

$$(10.14)^{**}$$

* 取り扱う系は線形系であるから、取り扱いの便宜上 \$K_i=1\$、すなわち式(10.12)において \$X(p)=1/(\omega_i+p)\$ と考えて計算を行なう。このようにすることにより、\$\overline{x(t)^2}=\overline{x(nT)^2}=1\$ となり、ループ・ゲイン \$K=0\$ のとき、
 $\overline{y_x(nT)^2}=\overline{x(nT)^2}=1$ となるから、各種のループ・ゲイン \$K\$ の場合に対する \$\overline{y_x(nT)^2}\$ の評価が明瞭になる。 附録14 参照

** 附録13 参照

図 10.7 は制御装置 $K_c/(1-z^{-1})$ を使用し、線速 a m/sec で運転するものと仮定した場合の外乱による出力の自乗平均 $\overline{y_x(\tau)^2}$ を、サンプリング周期 T_s を媒介変数とし、制御装置比ゲイン k_c ($= K_c/K_0$) を変化した場合について求めたものである。

図 10.8 (a), (b) は図 10.7 より、ゲインの値を媒介変数にとり、サンプリング周期を変化した場合の自乗制御面積増減の概略を示したものである。これらの図より、外乱に対する出力の自乗制御面積を評価尺度にえらんだ場合の、この系に対する最適サンプリング周期および、ゲインはそれぞれ、つぎのようになる。

巻取線速 a m/sec

サンプリング周期 $T = T_s T_L \div 1.36 T_L$

一巡ループゲイン $K_c K_0 = k_c K_0^2 \div 2.35 K_0^2$ (10.15)

図 10.9 は同じ系において、線速を $1.3 a$ m/sec に増加した場合に対する計算結果で、同じように最適サンプリング周期、ゲインは、

巻取線速 $1.3 a$ m/sec

サンプリング周期 $T \div 1.36 T_L$ (10.16)

一巡ループゲイン $K_c K_0 \div 2.35 K_0^2$

となり、この程度の線速の変更では、サンプリング周期、ループゲイン共、ほとんど変化する必要のないことを示している。^{** (251 頁脚註)}

* 線速を変化すれば、むだ時間 T_{L0} がそれに反比例して変化する。線速は製造線種、被覆機の性能、外乱の混入量等により最適と思われるものが選定されており、シンセシスの対象とすることはできなかった。

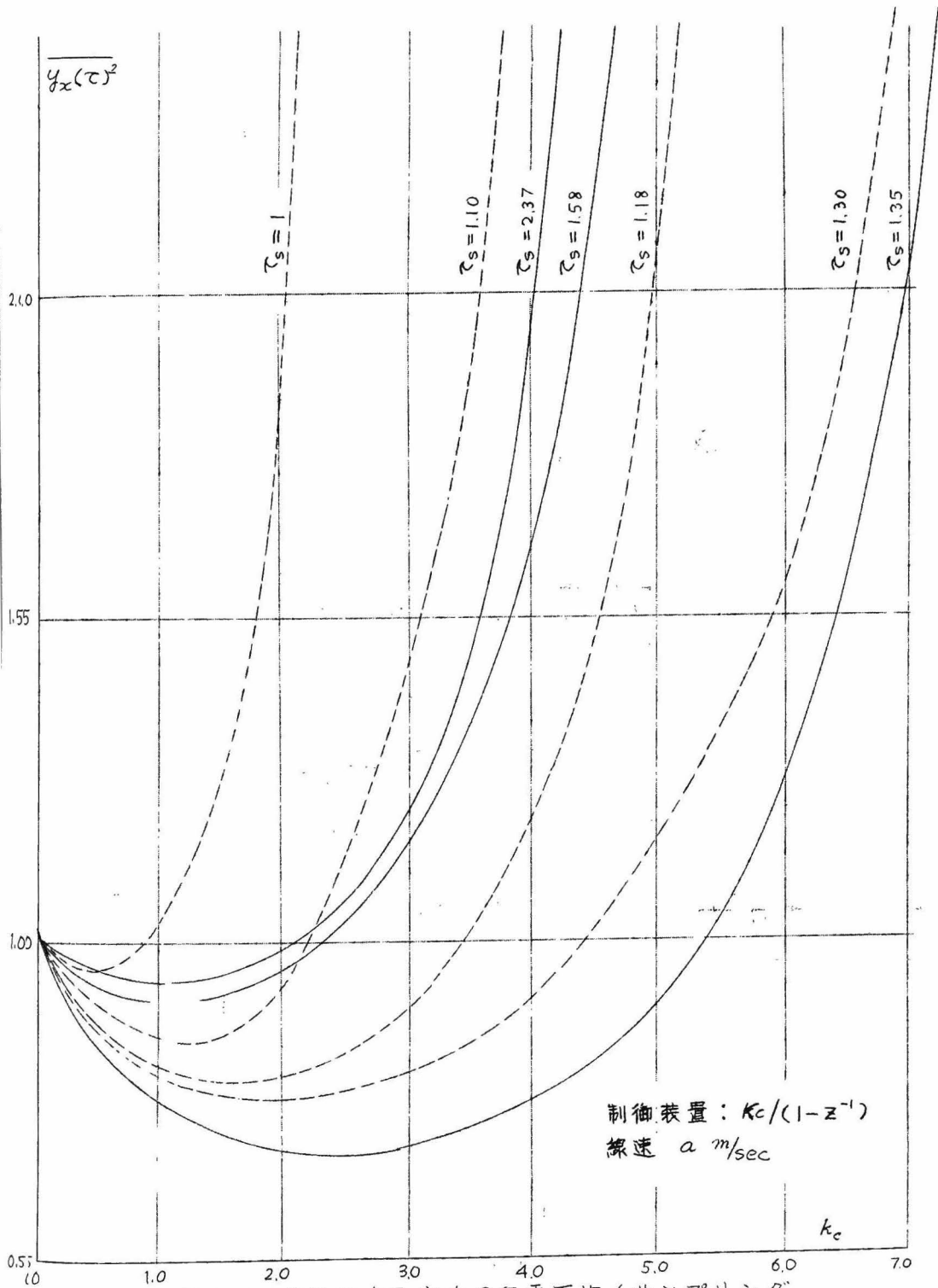


図 10.7 外乱による出力の自乗平均 (サンプリング周期をパラメータとして示したもの)

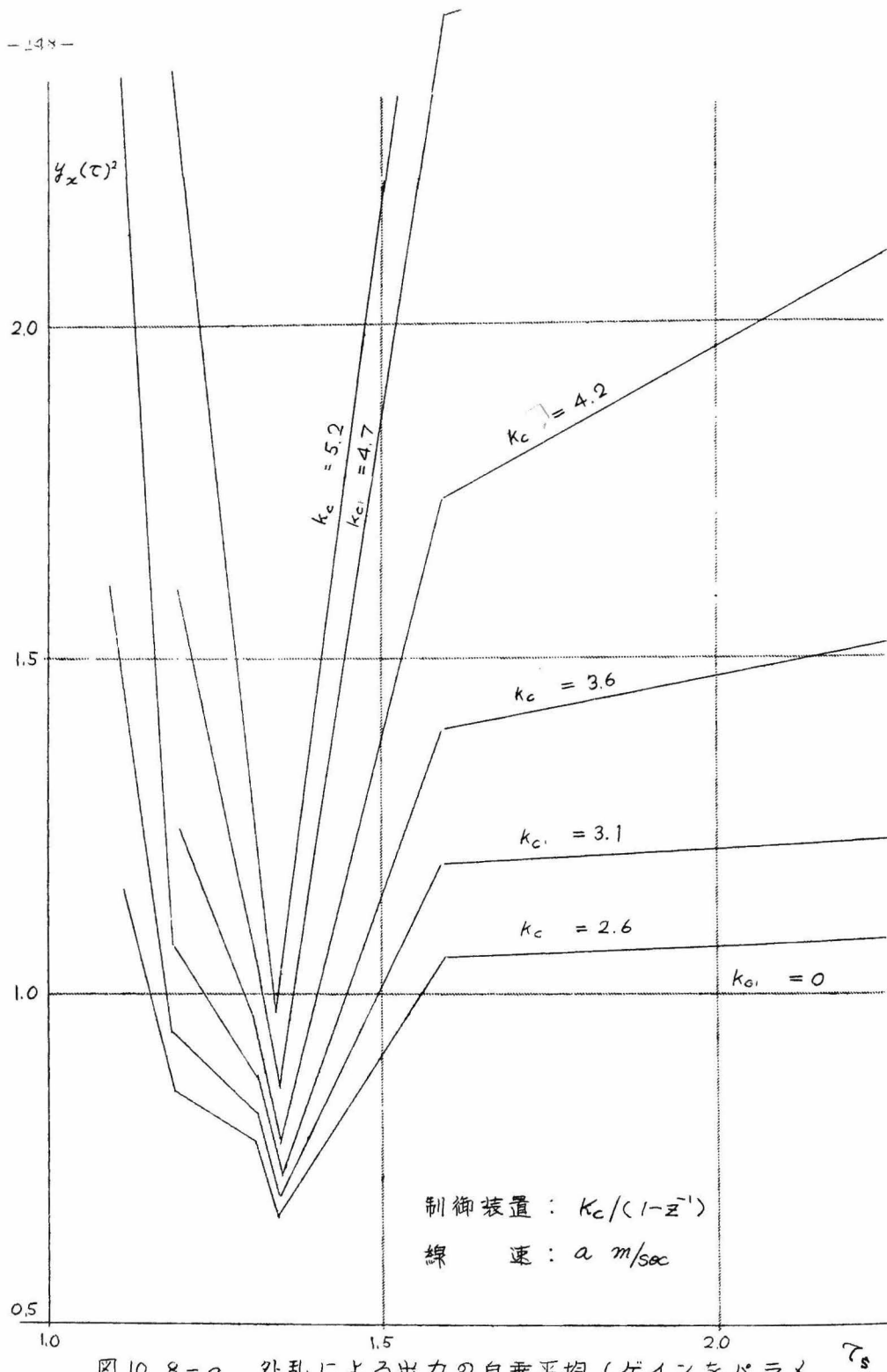


図 10 8-a 外乱による出力の自乗平均 (ゲインをパラメータとして示したもの)

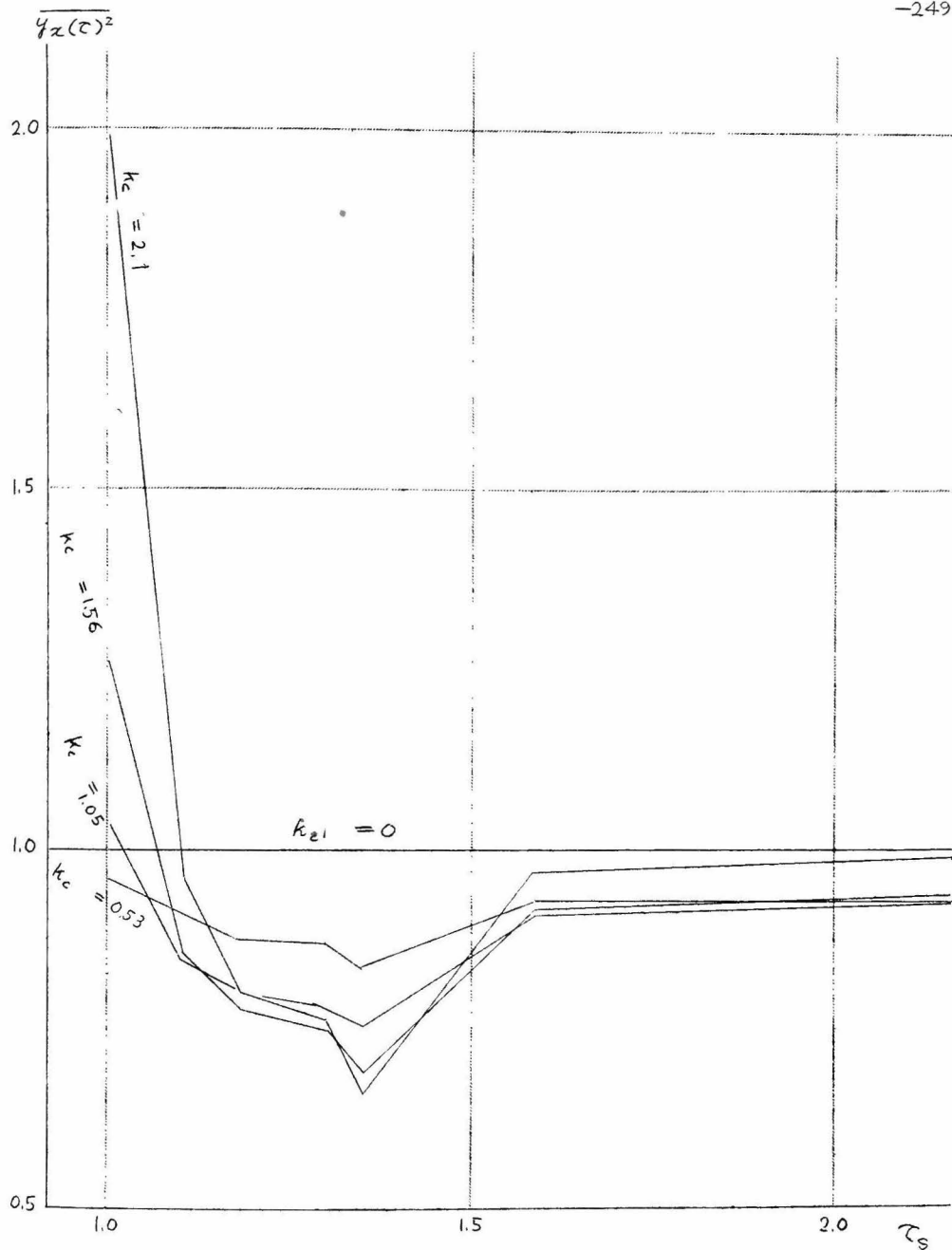


図 10-8-6 外乱による出力の自乗平均(ゲインをパラメータとして示したもの)

制御装置 : $k_c / (1 - z^{-1})$

線 速 : $a \text{ m/sec}$

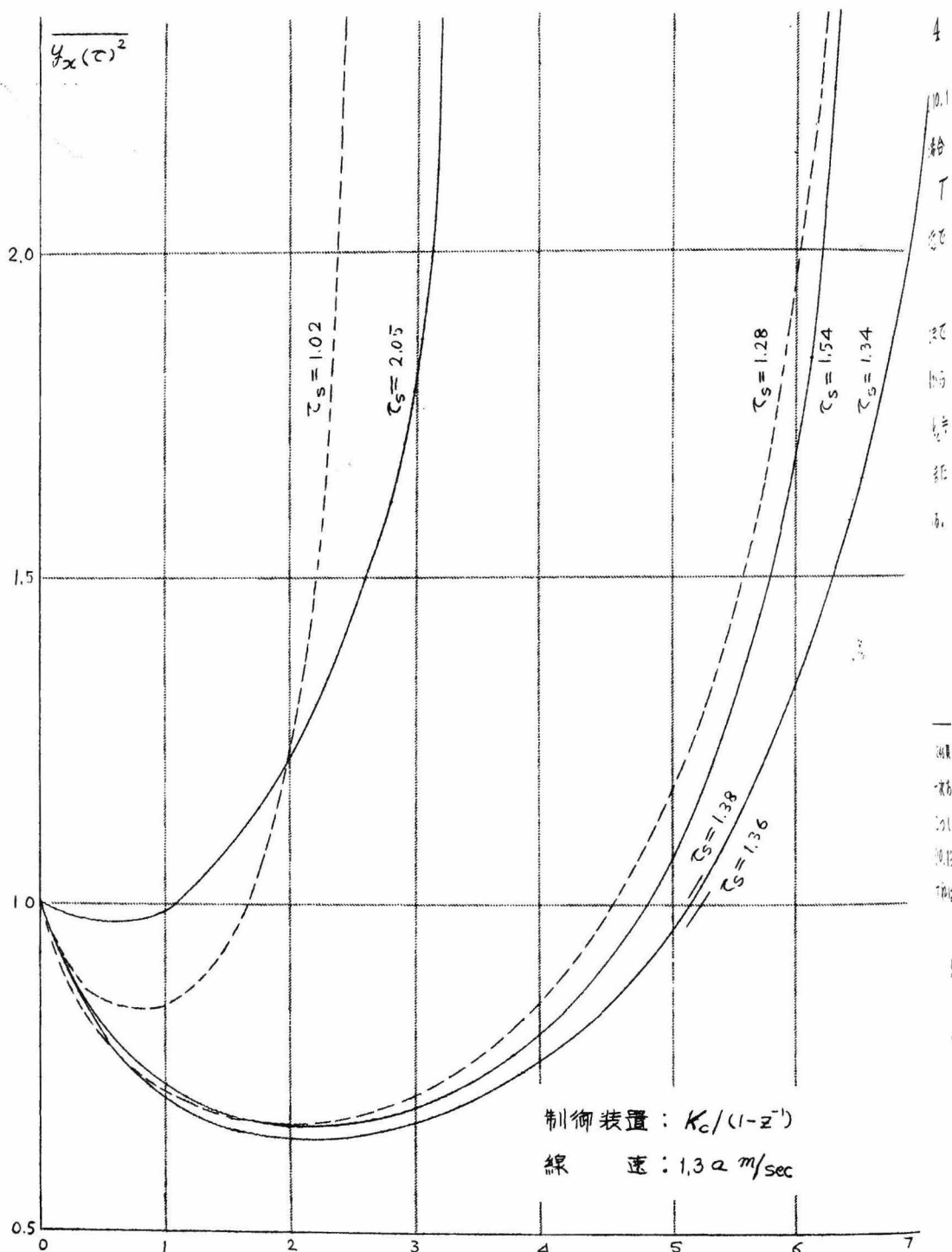


図 10.9 外乱による出力の自乗平均 (サンプリング同期をパラメータとして示したもの)

10. 4 サンプルング周期と系の安定度との関係

図 10.10 は上記線速 a m/sec の系において、サンプルング周期を変化した場合の安定限界の変化を示したもので、

$$T \doteq 1.30 T_L \quad (10.17)$$

の附近で最も安定性があり

$$K_c K_o \doteq 11 K_o^2 \quad (10.18)$$

附近まで安定動作をする。式 (10.17) の結果は、外乱に対する自乗制御面積からえた結果、式 (10.15) とほぼ一致する。式 (10.15) に示すように、 $k_c \doteq 2.35$ にえらんだときのゲイン余裕は約 11 db ということになる。また、周波数特性計算により、この場合の位相余裕は約 52° になっている。

*(246頁) 以上の結果は特定の線速、したがって無駄時間 T_L 、および一次おくれ時定数 T_1 、特定の外乱スペクトル密度関数を有するものについて求めたものである。任意の T_L ($< T$)、 T_1 および、 ω_1 (式 (10.13) 参照) の場合に対する出力自乗平均の計算式を参考までに記すれば以下のように表わされる。(附録 15 参照)

$$\overline{y_x(t)^2} = 4J_0 \frac{W^2 a_1 + V^2 a_3}{a_2(a_1 a_2 - a_0 a_3)}$$

$$a_0 = K_c K_o (1-C)(1-J_1)$$

$$a_1 = 2(1-C)(1-J_1) + K_c K_o [1 - 2C' + C + J_1(1 - 3C + 2C')]$$

$$a_2 = 4(1-T_1 C) + K_c K_o [C - 1 + J_1(1 + 3C - 4C')]$$

$$a_3 = (1 + J_1) [2(1+C) - K_c K_o (1+C - 2C')]$$

$$J_0 = 1 - e^{-2\omega_1 \tau_s}, J_1 = e^{-\omega_1 \tau_s}$$

$$W = 1 + C, V = 1 - C$$

$$C = e^{-T_s/\tau_1} = e^{-T/T_1}, C' = e^{-(\tau_s-1)/\tau_1}, \tau_s = T/T_L, \tau_1 = T_1/T_L$$

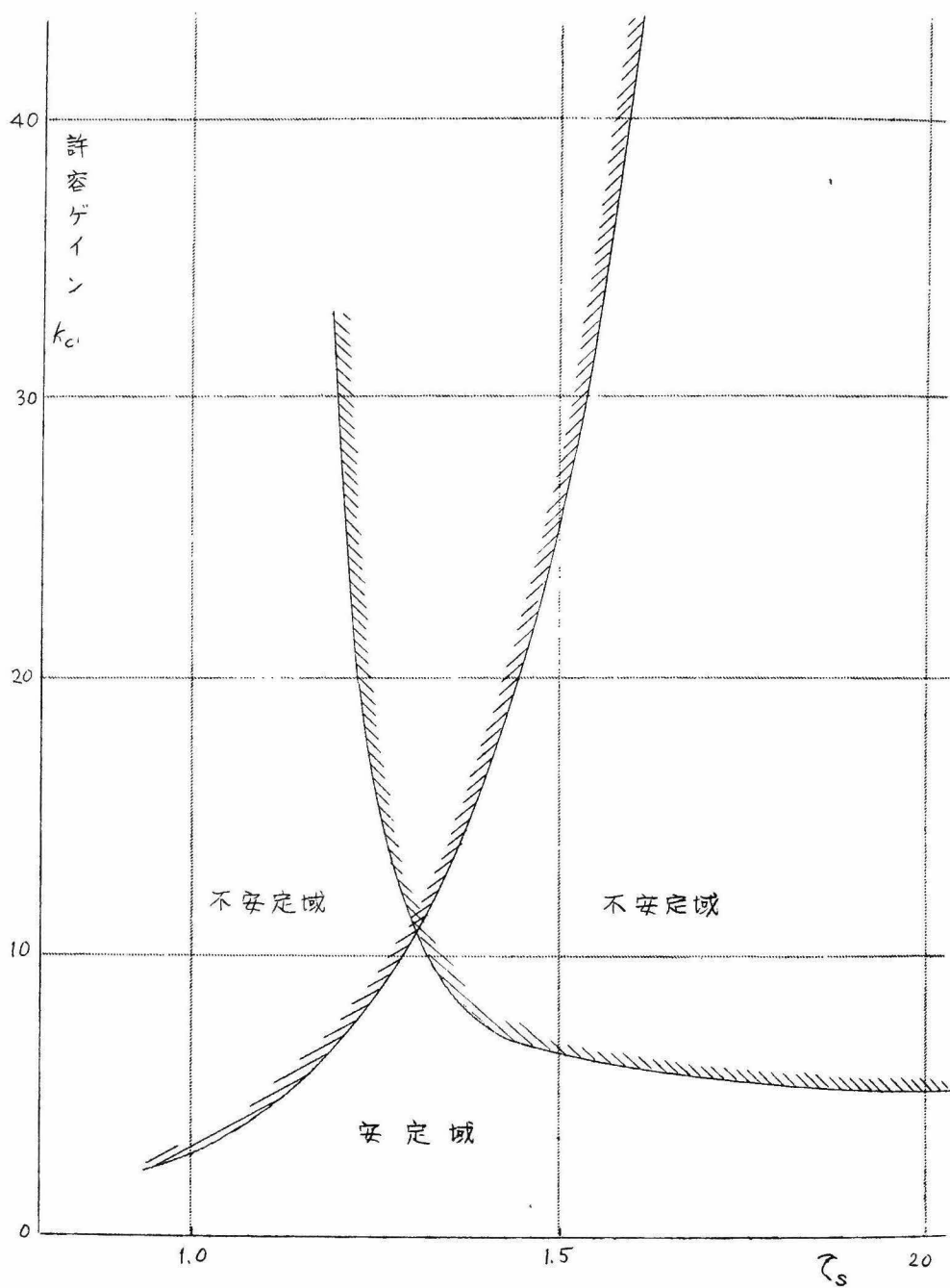


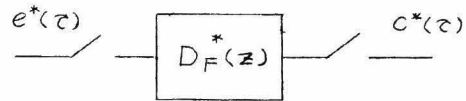
図 10.10 サンプルング周期と系の安定度との関係

10.5 微分操作に対する吟味

以上の論述における制御装置 $D_F^*(z)$ の制御動作は連続制御系における(比例+積分)動作に類似なもの、すなわち 図 10.11 において、
 $n\tau_s \leq \tau < (n+1)\tau_s$ の期間

に対する操作信号 $c(n\tau_s)$

は



$$c(n\tau_s) = K_c e(n\tau_s) + c(\overline{n-1}\tau_s)$$

(10.19)

図 10.11 制御装置と入出力パルス列

なる形で計算されるものであった。これは連続要素 K_c/s の z 変換をとることにより得られるものである。すなわち、

$$Z\left[\frac{K_c}{s}\right] = \frac{K_c}{1-z^{-1}} \quad (10.20)$$

これに対し、 $K_c'(1 + 1/T_c s)$ の z 変換をとれば、

$$Z\left[K_c'\left(1 + \frac{1}{T_c s}\right)\right] = K_c'\left(1 + \frac{1}{T_c}\right) \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{K_c' z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (10.21)$$

となり、漸化式は、

$$c(n\tau_s) = \frac{K_c'}{T_c} e(n\tau_s) + K_c' [e(n\tau_s) - e(\overline{n-1}\tau_s)] + c(\overline{n-1}\tau_s) \quad (10.22)$$

で表わされる。上式における右辺第2項 $K_c' [e(n\tau_s) - e(\overline{n-1}\tau_s)]$ は本編第8章に述べたことから明らかなように、微分動作の存在することを意味する。

式(10.19)、(10.22)両式の場合につき、制御装置構成の難易を考えるに $Z[K_c/s]$ の場合には唯1個の過去のデータ $c(\overline{n-1}\tau_s)$ のみを記憶利用すればよいのに対し、 $Z[K_c'(1 + 1/T_c s)]$ の場合には $c(\overline{n-1}\tau_s)$ 、 $e(\overline{n-1}\tau_s)$ 2つの過去のデータを常に記憶している必要があり、装置が複雑になる。式(10.22)は $K_c' \rightarrow 0$ 、 $T_c \rightarrow 0$ 、 $K_c'/T_c \rightarrow K_c$ の極限において式(10.19)で表わされる制御装置に一致する。

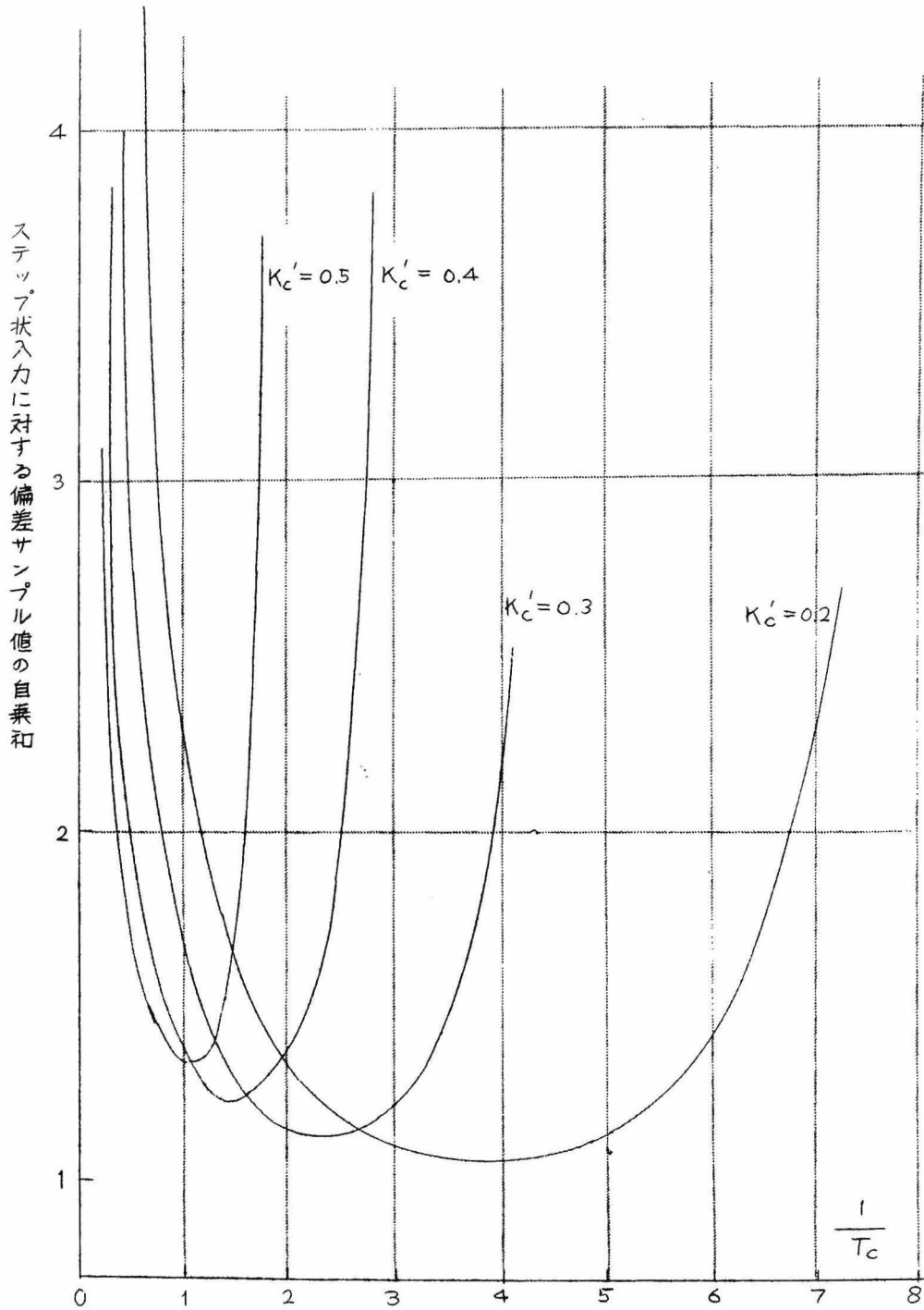


図 10.12 ステップ状入力に対する偏差
サンプル値の自乗 (式 (10.22) 参照)

図 10.12 は単位ステップ状目標値入力に対する偏差サンプル値の自乗和をえがいたものである。計算式は式(10.4)を参照することにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^2(n\tau_s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} E^*(z) E^*(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad E^*(z) = \frac{R^*(z)}{1 + D_F^*(z) H G^*(z)} \quad (10.23)$$

図 10.12 の結果は $T_c \rightarrow 0$, $K_c \rightarrow 0$ に近づくほど $\sum e^2(n\tau_s)$ の最小値がわずかながら減少しており、ステップ状目標値入力に対する偏差の自乗和のみについて言えば、 $D_F^*(z)$ として、複雑な式(10.22)で表わされる微分動作を伴うものを用うるよりは、式(10.19)で表わされる簡単な近似(比例+積分)型の制御装置を用うる方が良いことを示している。

10.6 サンプル値多重(比例+積分)制御を実施するための基本的回路構成

サンプル値系において(比例+積分)動作を行なわせる場合、 $\tau = n\tau_s$ (n : 正整数)における $D_F^*(z)$ の出力 $c(n\tau_s)$ はさきに(10.19)に示したように、

$$c(n\tau_s) = K_c e(n\tau_s) + c((n-1)\tau_s) \quad (10.24)$$

で与えられる。これが1つの系(多重サンプル値系中の1つの系の意味)に対する演算基本式であり、

この演算を行うためには図9.

1から容易にわかるように、

図 10.13 に示すようなディレイ・ライン・回路網(delay

line network)を使用する

には、図 10.14 に示すよう

に2つの記憶回路をサンプラー S_1 , S_2 を介してフィードバック回路に組むことにより簡単に行なうことができる。

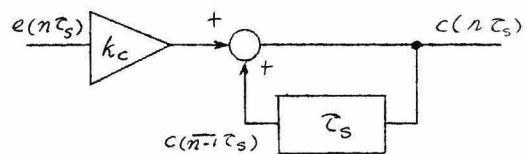


図 10.13 ディレイ・ライン回路網を用いたサンプル値“比例+積分”動作制御装置原理図

記憶装置 A は図 10.15 (e) では B と同様 1 サンプルング期間同一の値を記憶するようになっているが、記憶装置 A の役目を考えれば、 $t = nT_s - T_a$ の瞬間、 S_1 が閉じることにより、偏差信号サンプル値 (制御装置への入力) $e(nT_s)$ ($t = nT_s - T_a$ における $e(t)$ の値であり、正確には $t = nT_s$ における値ではない。) と記憶回路 B の記憶値 $c(nT_s)$ との和が計算され、これが記憶装置 A に $c(nT_s)$ として記憶される。 $t = nT_s$ において、記憶装置 B の入力のサンプラ S_2 が動作して、本記憶回路の記憶操作時間 T_b の後に A の記憶値 $c(nT_s)$ は記憶回路 B に移される。かくして、この値が正確には $nT_s + T_b \leq t \leq (n+1)T_s$ の期間* 間操作信号として、制御対象 $G(s)$ の入力に加えられる。したがって記憶回路 A は B が記憶操作を終るまでホールドしておけばよく、残りの時間、 $nT_s + T_b < t \leq (n+1)T_s - T_a$ の期間は不要である。

以上のことから、本課題のように、多くの制御対象をいすれも $K_c/(1-z^{-1})$ なる制御装置で制御する場合、図 10.14 に示した (制御装置 + 零次ホールド) 中、記憶回路 A は全部の制御系に対し共用することができることになる。このようにすることにより、必要な記憶装置の数はほぼ半分ですむ。記憶回路の数が半減することは、価格、装置全体の信頼性、保守の点から現場向き装置として望ましいことと考えられる。ここで注意すべきことは、記憶回路、A の信頼性が特に重要になることである。今回試作せるものにおいては記憶回路 A, B 共、同一構造のものとし、各々をプラグ・イン (plug in) 式にすることにより、互換性を与え、信頼性を増すように考りよしている。

10.7 サンプルングおよび記憶(ホールド)回路の基本的特性

上に述べたように図 10.14 に示す基本演算回路を使用する場合、 $T_a +$

* $nT_s \leq t \leq nT_s + T_b$ の期間、記憶回路出力に現れるのは記憶操作に伴う過渡電圧であり、正確には図 10.15 のような波形とはならないが、記憶操作時間は T_b にくらべ、充分小さいから実際上問題にならない。

で、だけの計算おくれ時間を伴う。またがって実際に装置を構成するにあたっては、この τ_a をできるだけ短くするよう工夫する必要がある。このような目的に適った回路として図 10.16 に示すサンプリング記憶回路を使用する。

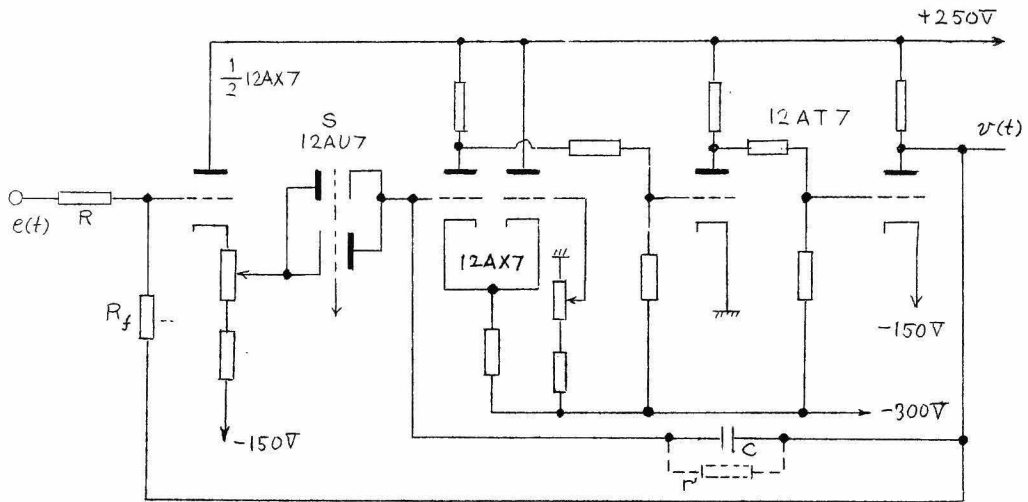


図 10.16 試作多重制御装置に用いた“サンプリング+記憶”回路

図において、三極管スイッチ S が閉じる直前におけるコンデンサ C の電圧を V_0 とすると S が閉じた後の出力は $|A|$ (直流増幅器ゲイン) $\gg 1$ なる場合には、コンデンサの漏洩抵抗 r' が非常に大きいとして

$$V(s) = -\frac{K}{T_1 s + 1} E(s) - \frac{T_1 s}{T_1 s + 1} V_0 \quad (10.25)$$

$$K \doteq R_f / R, \quad T_1 \doteq (R + R_f) C r' / R$$

ここに r' は S が導通状態のとき、直通増幅器入力グリッドからカソード・ホロワー側をみた抵抗である。式(10.25)より、 $C r'$ を小さくすればするほど短時間のスイッチのオンにより $V(s) \doteq -\frac{R_f}{R} E(s)$ 、すなわち、入力 $e(t)$ の瞬時値をサンプルすることができる。

つぎに S が開路する直前における C の電圧を V_1 とすれば、 S 開路後の出力電圧は、

$$V(s) = \frac{T_2 s V_i}{T_2 s + 1}, \quad T_2 = C(1 - \frac{1}{A}) / \left[\frac{1}{r'} - (\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}) \frac{1}{A} \right] \quad (10.26)$$

ここに r は S 開路状態における直流増巾器入力カグリッドの絶縁抵抗、すなわち長時間のホールドを期待するためには A をできるだけ大きく、容量の大きな漏洩吸収の少ないコンデンサを使用すればよい。ただし C をあまり大きくすると Cr'' が大きくなり、サンプリングに時間がかかる様になるからスイッチ S の開時間、閉時間、 r'' の値等を考りよして決定する必要がある。

図 10.17 は三極管スイッチのグリッド g をアースすることにより、 S をオンの状態にし、入出力間の直線性および、カソード・ホロワー出力電圧 V_c (直流増巾器入力カグリッドは 0 ボルトであるから三極管スイッチ 12AU7 の管内ドロップに相当する) をえがいたものである。

図 10.18 は約 30 ボルトのステップ電圧を τ_a (又は τ_b) = 50 msec, 30 msec, 20 msec, 10 msec, 5 msec でサンプルした場合のデータで、 g に加えたパルスは図に記入せるものを使用し、サンプリング周期は 2 sec である。図 10.19 はサンプリングパルスの平均電位を図示のように低くした場合の結果である。

図 10.20 は $C = 0.1 \mu F$ を使用した場合のホールド特性を示したもので本データよりわかるように数分間のホールドは何等問題とならない。

図 10.21 (a), (b) は正弦波入力を各種のサンプリング・パルス巾 ($P.W$ で記入) でサンプルしたものを示したもので、これらのデータからわかるように、サンプル値の差の小さい場合には $P.W = 5 \text{ msec}$ (-30 ボルト \rightarrow 0 ボルト) のサンプリング・パルスで充分なことがわかる。

10.8 試作 5 重サンプル値制御装置の動作タイムチャート

今回試作せる制御装置は 5 つの制御対象に対し、同時に制御を行うことが出来るもので、図 10.22 に示すように記憶回路 D および $e(n\tau_s)$

* 図における入力波形上のスパイクはサンプル点を指示するものである。

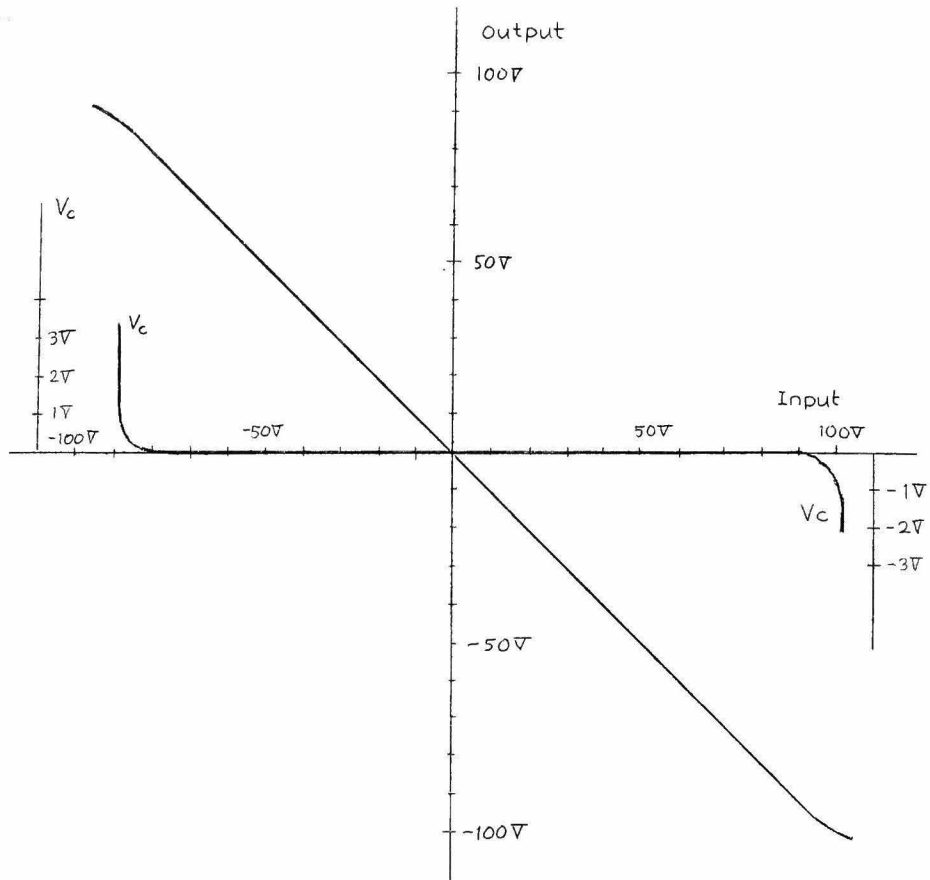


図 10.17 “サンプリング+記憶”回路入出力特性

+C($\overline{n-1}$ で)加算回路 (Plug in Unit No. 1~5) を5個、記憶回路A (Plug in Unit No. 0*) を1個および、サンプラー $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) を開閉するパルス分配回路 (Pulse Distributor) 1個より成る。多重度を5にえらんだのは、Pulse Distributorをできるだけ簡略にする必要からである。なお、本 Pulse Distributor を1個用いることにより、多くの5重サンプル値制御装置を並列に操作することができる。

* Plug in Unit No. 0 は No. 1~No. 5 と同じ構造のものを使用し、ただ加算回路が効かないようコンソール (収納箱) の外部接続を行なった。

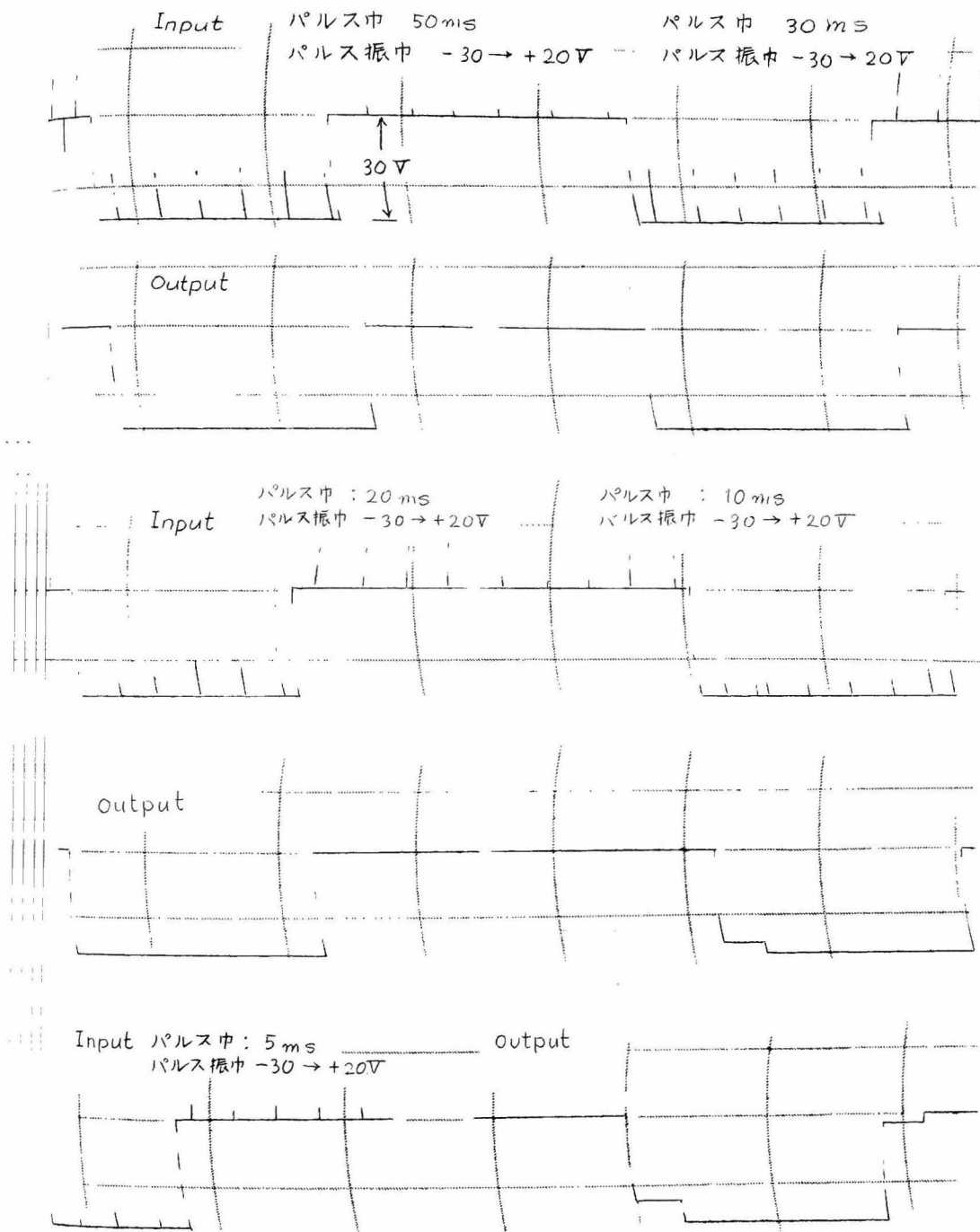


図 10.18 ステップ状入力に対する“サンプリング+記憶”動作の例(1)

入力: 30V ステップ サンプリングパルス巾: 50, 30, 20, 10, 5 msec
 パルス振巾: -30 volt より +20V に立上る 矩形パルス

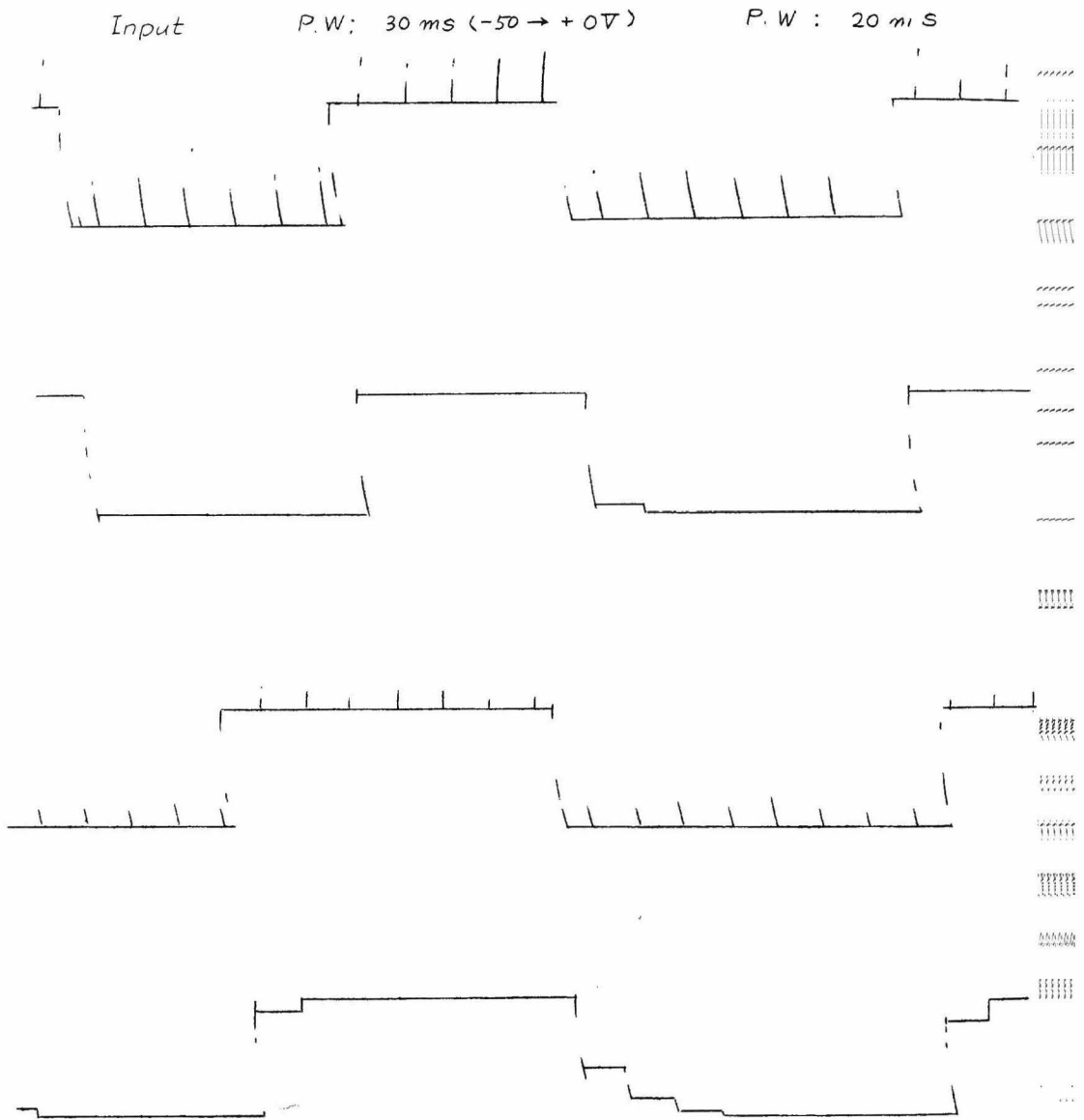


図 10.19 ステップ状入力に対する“サンプリング”
+記憶”動作の例(2)

入力 : 30 Volt ステップ

サンプリングパルス巾 : 30, 20, 10, 5 msec

パルス振巾 : -50V より 0 Volt に立上る 矩形パルス

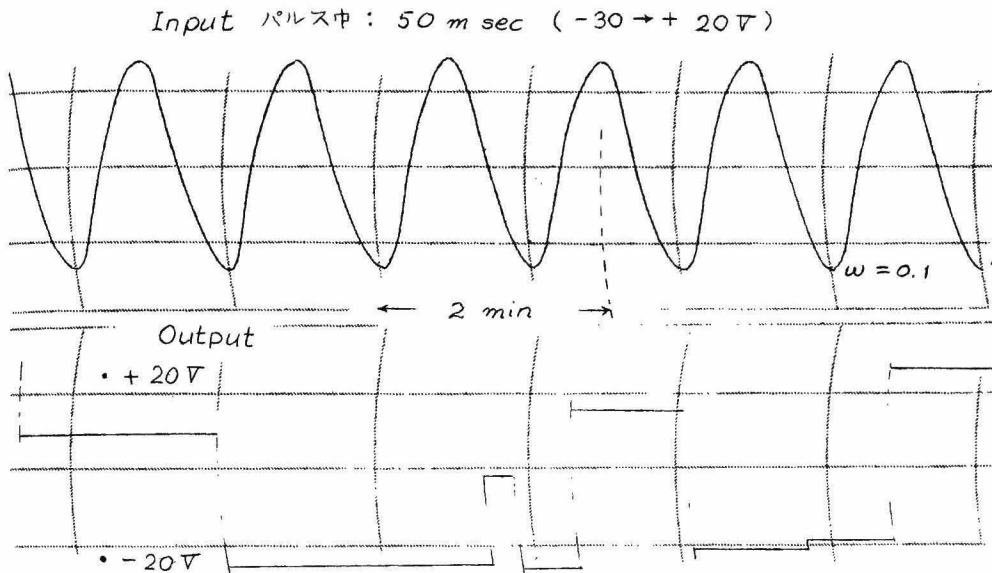


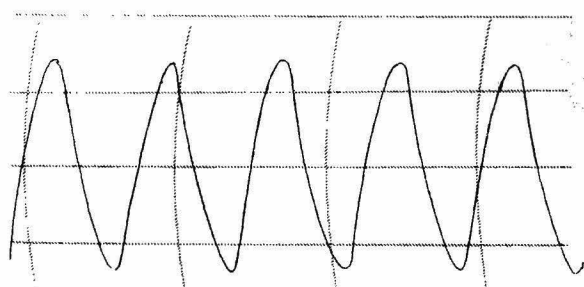
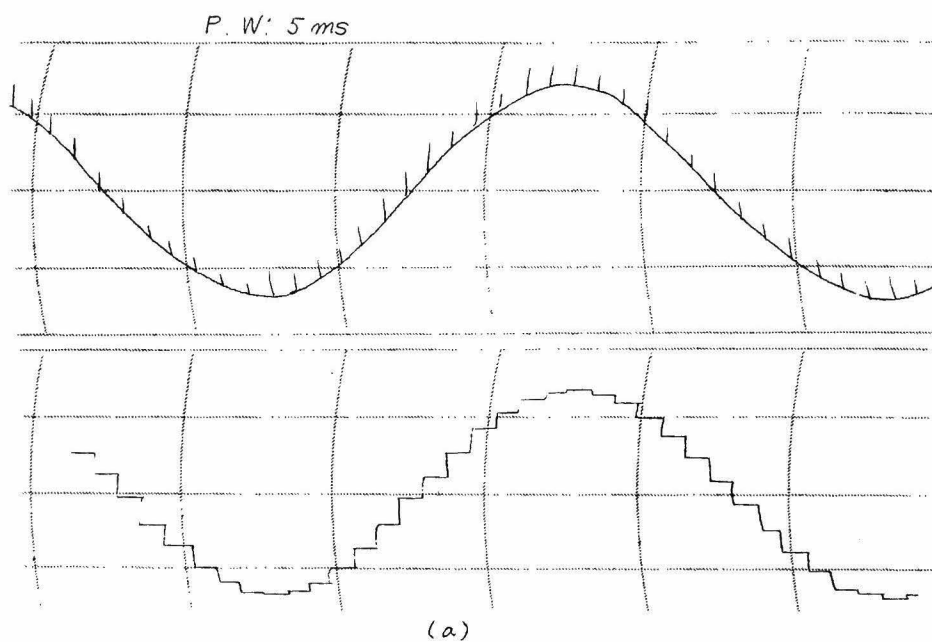
図 10.20 “サンプリング+記憶”回路のホールド特性

実際に使用した記憶加算回路は図 10.16 に示した基本回路を基礎としたものであり、三極管スイッチのグリッドは、オフの状態においては利用する信号電圧の負の最大値以上の負電圧を印加し、スイッチング用真空管をカット・オフに保ち、オンの場合にはグリッドに正方向パルス (positive going pulse) を加えて、そのパルス持続期間だけ球を導通状態にする。

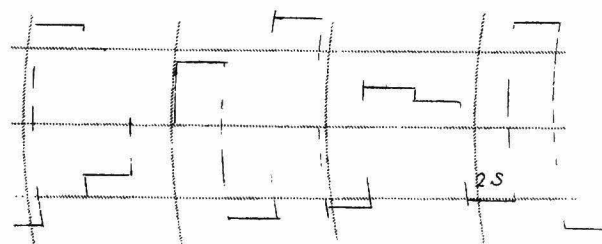
各三極管スイッチ $S_1^{(i)}, S_2^{(i)}$ は図 10.23 のタイムチャートにしたがって Pulse Distributor によりオン・オフされる。

三極管スイッチ (サンプラー) がこのタイムチャートにしたがって操作されることにより図 10.22 に示した Plug in Unit No 0, 1, 2, ..., 5 には図 10.23 下半分に示すような信号が現れる。

10.7 に説明したことから明らかなように、各記憶回路に最終的に記憶される信号値はスイッチ S が開路する直前の値である。したがって、図 10.23 タイムチャートに示すようにスイッチ $S_2^{(i)}$ の開路時間 ($\cong T/5$) が比較的長い場合、これが望ましからざる計算おくれを与えるように考



P. W: 20 ms (-30 → +20 V)



(b)

図 10.21 正弦波入力に対する“サンプリング+記憶”動作例

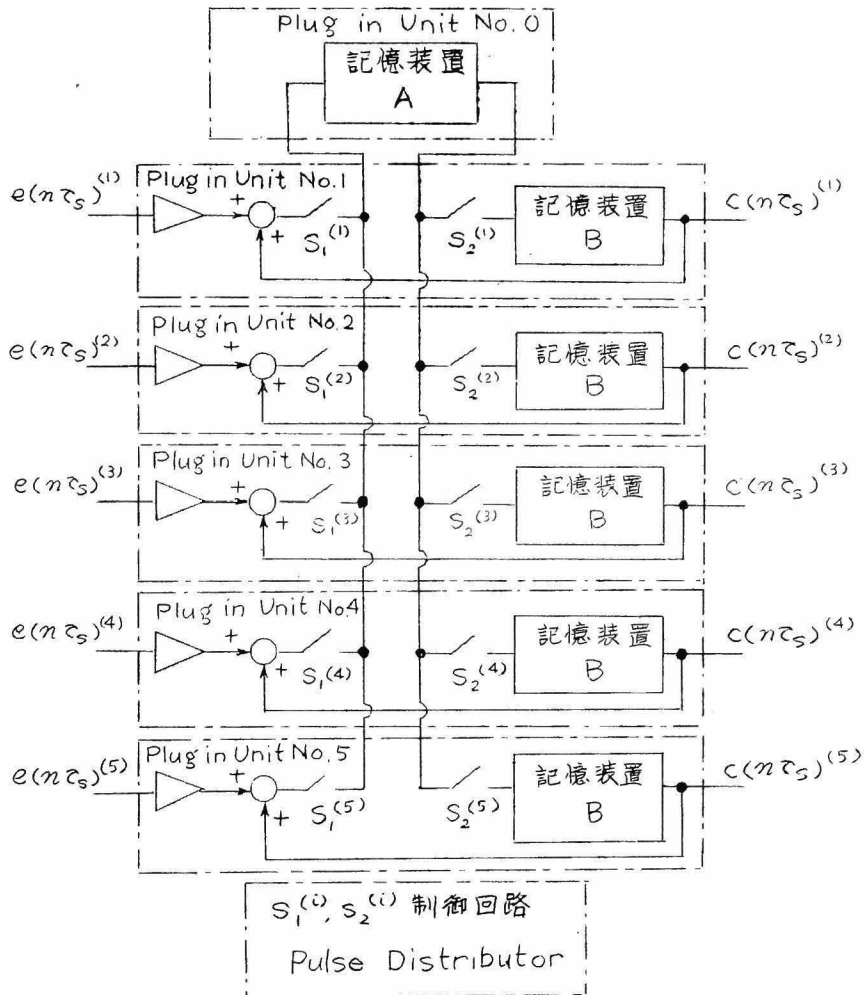


図 10.22 試作 5 重制御装置等価ブロック図

え勝ちであるが、 $S_2^{(i)}$ によってサンプルされる信号は Plug in Unit No. 0 の記憶値、すなわち直流電圧であるため、その恐れはなく、 $S_2^{(i)}$ が開じ、その過渡現象が終わったときが記憶操作完了になる。

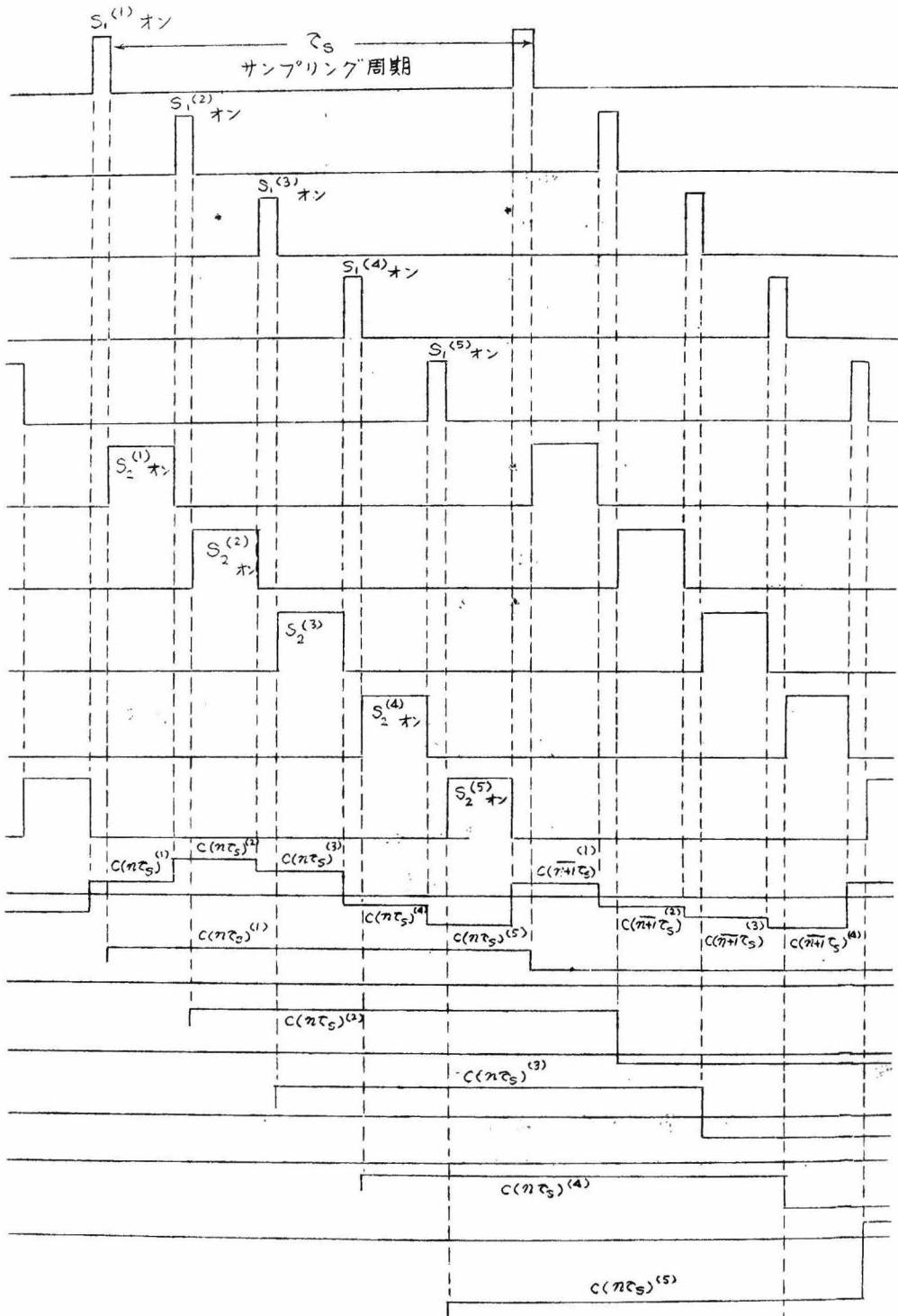


図 10.23 試作 5 重制御装置制御用パルスのタイムチャート

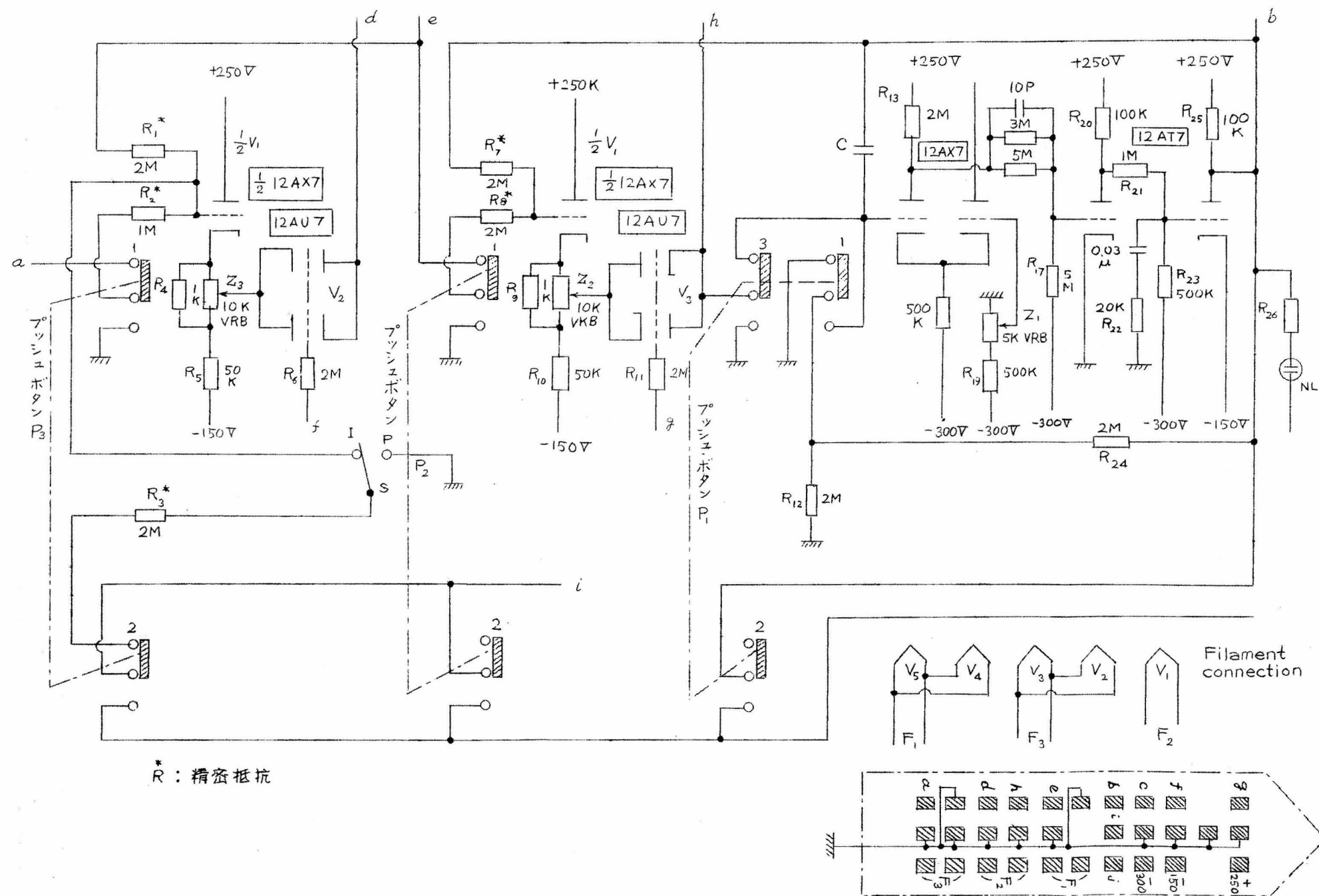


図 10.24 試作 5 重制御装置 Plug In Unit の回路図

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

10. 9 試作装置主要構成要素および全結線図

10. 9 1 プラグ・イン・ユニット (Plug in Unit)

本試作装置の主要部分はすでに述べたように Plug in Unit No. 0, 1 ~ 5 および、これらの動作を図 10. 23 のタイム・チャートにしたがって制御する Pulse Distributor よりなる。

Plug in unit No. 0 はさきに述べたように No. 1 ~ No. 5 と異り、記憶回路、すなわちコンデンサ・フィードバック直流増巾器のみで目的を達することができる。しかし、本 Unit が故障した際 No. 1 ~ No. 5 Unit による互換性を持たせるため、No. 0 と No. 1 ~ No. 5 両者の機能の使い分けは総合結線図に示すような外部接続により行えるようにした。

図 10. 24 は Plug in Unit 1 台の全結線図である。図における V_4 (12AX7), V_5 (12AT7) は直流増巾器を構成するものであり、フィードバックコンデンサ C は Plug in Unit No. 0 においては $0.01\mu\text{F}$ 、それ以外はいずれも、 $0.1\mu\text{F}$ のポリスチロール・コンデンサを使用している。コンデンサ C の容量は 10. 7 で説明したように所要サンプリング時間を短くしようと思えば小さく、長時間記憶を期待するためにはできるだけ大きい方が望ましい。Plug in Unit No. 1 ~ No. 5 は出力ホールド回路の役目をかねており、サンプリング周期のえらび方にもよるが、相当長時間のホールドを行う必要がある。これに対し Plug in Unit No. 0 はすでに述べたようにホールド時間は No. 1 ~ No. 5 の $1/5$ でよいが、記憶値の入替え、すなわちコンデンサ C の充放電は No. 1 ~ No. 5 の 5 倍の頻度で行なわなければならない。したがって、上述のように、Plug in Unit No. 0 とそれ以外のものとはコンデンサ C を入替えて使用することにした。

図 10. 24 におけるアッシュ・ボタン (Push Button) P_1 は本直流増巾器のゼロ調整を行うものであり、本ボタンを押すことにより、 $P_1(1)$ 回路が切換り、ゼロ調整の結線を構成する。 $P_1(2)$ はこの際、直流増巾

巻出力に現れる不平衡電圧を、ゼロ・バランス・メータ (Zero Balance Meter) に接続するための回路であり、ゼロ調整用ボリューム Z_1 (Screw Drive) をまわして、指示がゼロになるようにする。 $P_1(3)$ の回路は直流増巾巻入力グリッドにプッシュ・ボタン・スイッチの漏洩抵抗を通して流入する V_3 よりの電圧を接地し、正確な調整を行えるようにするものである。これらの3回路は P_1 を押すことにより連動して切換えられる。

$V_3(12AU7)$ は記憶回路Bのオン・オフを行うところの図 10.22 のサンプラー $S_2^{(i)}$ に相当し、図 10.23 のタイム・チャートに従ってグリッドにパルスが印加される。

プッシュ・ボタン P_2 はスイッチング機構を含めた記憶回路B全体のゼロ調整用切換ボタンであり、 $P_2(1)$ 回路の切換により図 10.25 に示すようなゼロ調整回路が構成される。図 10.25 より明らかのように、本ゼロ調整回路はスイッチ管 V_3 にスイッチングパルスが入ったときだけ、ゼロ調整回路を構成し、それ以外の時間はホールド状態になる。 $P_2(2)$ 回路は不平衡出力電圧を前記ゼロ・バランス・メータ

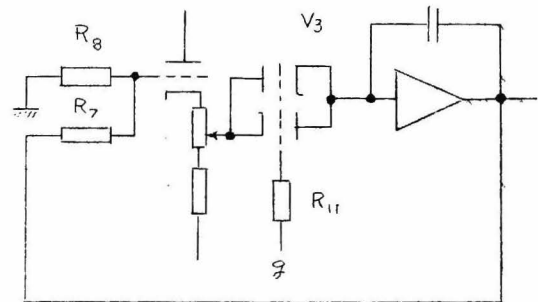


図 10.25 Plug in Unit のゼロ調整回路 (1)

に接続するためのものであり、Plug in Unit No. 1 ~ No. 5 にあっては本メータ回路は外部的に直流増巾器出力回路 b に直結されるが、Plug in Unit No. 0 のコンソール側コネクタには、この外部接続がなく、Plug in Unit No. 0 では P_2 を押してもメータ回路はつながらない。(図 10.34 参照)

図 10.24 における V_2 は記憶回路A (Plug in Unit No. 0) のオン・オフ用サンプラー $S_1^{(i)}$ に相当し、図 10.23 のタイム・チャートに従っ

て操作される。

プッシュ・ボタン P_3 は Plug in Unit No. 0 を含めた全体のゼロ調整用切換ボタンであり、調整はボリューム Z_3 (Screw Drive) により行う。

図 10.24 の (de) 端子間に Plug in Unit No. 0 の (ab) 端子が接続される。 $P_3(1)$ 回路の切換により図 10.26 に示すようなゼロ調整回路が構成される。 $P_3(2)$ はゼロ・バランス・メータを直流増幅器出力に接続すると同時に直流増幅器出力からの $C(\overline{\omega-1})$ で g 加算フィードバック

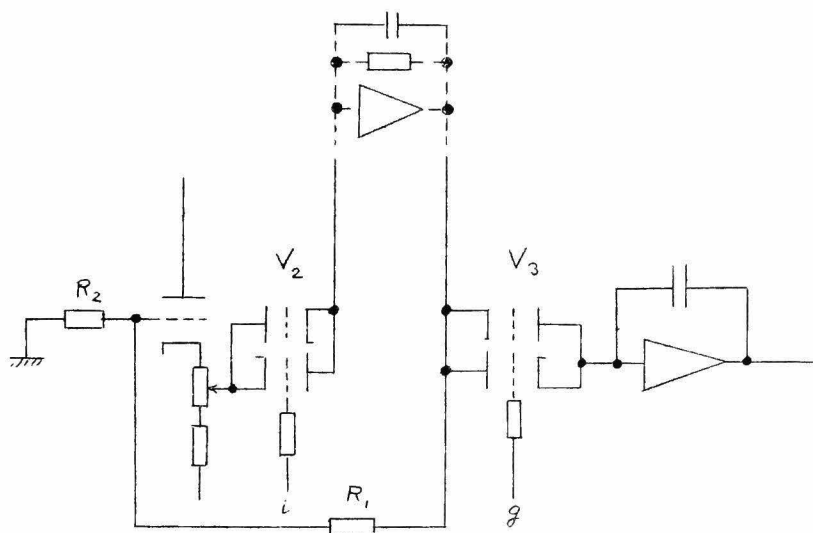


図 10.26 Plug in Unit のゼロ調整回路 (2)

経路を開き、Plug in Unit を (比例+積分) 特性から (比例) 特性に切換え、ゼロ調整を可能にするためのものである。

以上、Plug in Unit No. 1~No. 5 のゼロ調整は $P_1(Z_1)$, $P_2(Z_2)$, $P_3(Z_3)$ の順で、3 回行わなければならないことになる。なお、1 つの特定の制御系に使用されている Plug in Unit (No. 1~No. 5 のいずれか) を調整しても、他の系の運転に何等障害をおよぼさないことは、 P_3 がサンプリング周期に同期したゼロ調整を行うような回路 (当該システ

ムが動作しているときには他のシステム制御用 Plug in Unit はすべて
ホールド状態にある)であるため、すべての制御系に対し共通に使用さ
れている Plug in Unit No. 0 の動作が阻害されないことから明らかで
ある。

なお、Plug in Unit No. 0 の g, f 端子には常時 -150 ボルトの
負電圧が接続されるような外部接続がほどこされており、本 Unit のス
イッチ管 V_2, V_3 は常にオフの状態に保たれる。(図 10.34 参照)

つぎに、図 10.24)におけるスナップ・スイッチ S の働きについて説明
する。本 Plug in Unit は積分性回路であるため、5つの Unit 中、制
御ループを構成せず、放置してあるものが存在すると、その Unit の出
方にはドリフト電圧その他を積分することにより、過電圧が出たままに
なる恐れがある。スナップ・スイッチ S はこのような場合に対し、Plug
in Unit の(比例+積分)特性を(比例)特性に切換えるためのもので
Plug in Unit を電圧を掛けたまま休止させるときには必ず P 側(比例
特性)に倒しておく。 S を P の位置におくことにより $c(n\tau_s)$ 計算過
程における $c(\overline{n-1}\tau_s)$ の経路が遮断され、 $c(n\tau_s) = K_c e(n\tau_s) +$
 $c(\overline{n-1}\tau_s)$ から $c(n\tau_s) = K_c e(n\tau_s)$ なる特性に切換えられる。

図 10.24)における R_{26}, NL の回路は過電圧指示のためのもので、
 NL はネオン・ランプであり、この回路の1端は直流増幅器出力に、1
端は外部接続を介してトランスに接続される。このトランスは NL の
放電開始電圧 100 ボルトを実質的に下げて使用するためのものである。

10.9.2 パルス分配回路 (Pulse Distributor)

図 10.28 は各 Plug in Unit スイッチング管 V_2, V_3 に図 10.23)に
示したような関係でサンプリング・パルスを送る Pulse Distributor
の全結線図を示したものである。

- (1) クロック・パルス発生回路 ($V_1: 2D21, V_2: \frac{1}{2} 12AU7,$
 $V_3: 12AU7$)

本回路は図 10.28 に示すように、Bootstrap 回路、Schmitt 回路

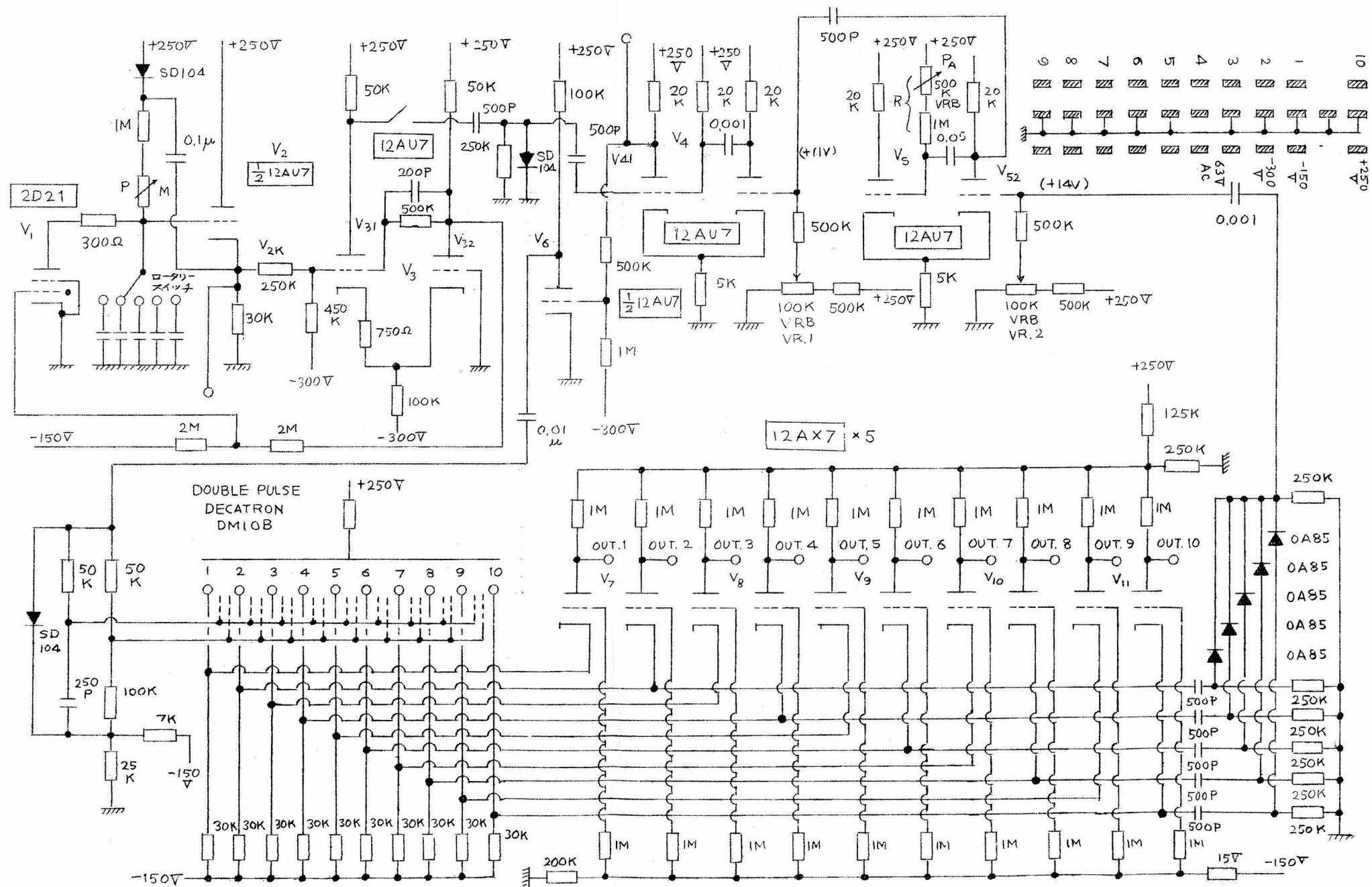
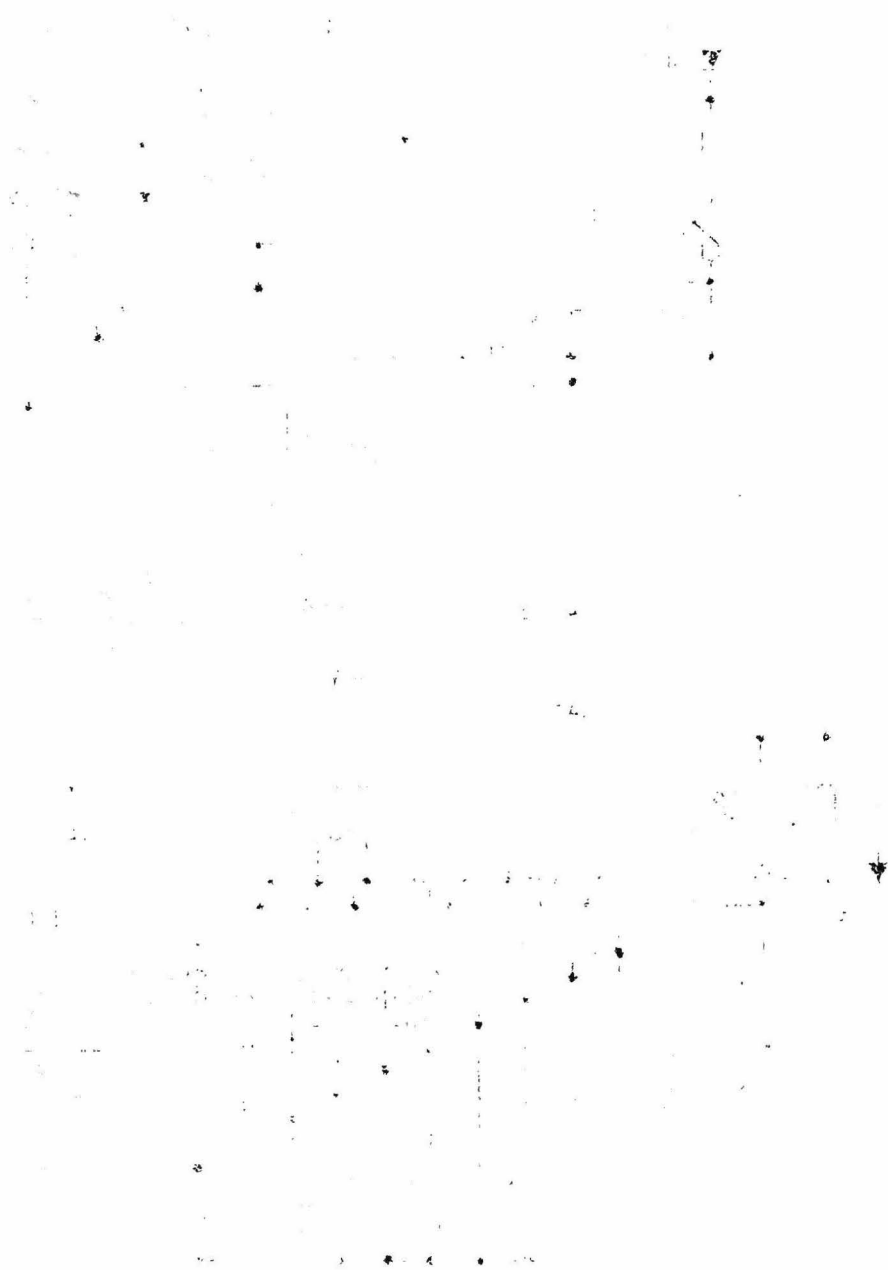


図 10.28 試作 5 重制御装置 Pulse Distributor の回路図



を組合せ、 $T/5$ の周期のクロック・パルス列を発生するためのものでその動作の概要を説明すれば以下のようにになる。

(1) ま、サイラトロン V_1 がオフになり、Bootstrap 出力 V_{2K} が図 10.27 に示すように上昇するとする。 V_{2K} が Schmitt V_3 の転移 (Transition) レベル E_p に達すれば Schmitt V_3 のアレー

ト V_{32} は同図に示すように正方向に急昇する。このため、サイラトロン V_1 がオンになる。したがって、

Bootstrap の出力 V_{2K} は急速に元に戻る。その途中、Schmitt 回路のヒステリシスによる、いま一方の転移レベル E_N に達すれば、Schmitt 回路は逆の転

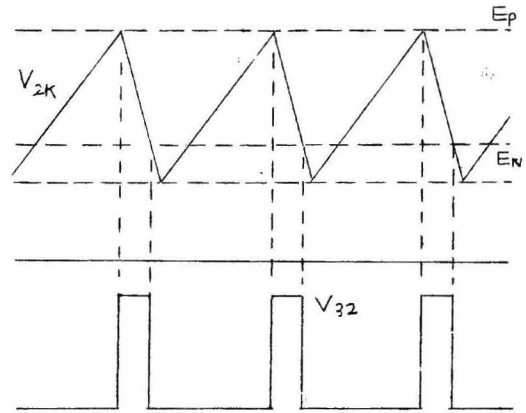


図 10.27 Pulse Distributor
のクロックパルス発生原理

移を行い、再び元に戻る。サイラトロン V_1 は V_{2K} が充分下るまでオンのままである。サイラトロン・アレート電圧がほとんど零となり、サイラトロンがカット・オフすれば再び前の過程をくりかえす。繰返し周期 $T/5$ はコンデンサー C の切換 (ロータリー・スイッチ) により段階的に、ポテンシオメータ P により各段階内で連続的にかえることができる。

試作装置に使用しているコンデンサーの大きさ、および可変周波数範囲は表 10.1 に示すとおりである。

表 10.1

	C	繰返し期間
1	0.5 μF	400 ~ 200 msec
2	0.1	88 ~ 44 "
3	0.05	45 ~ 23 "
4	0.03	26 ~ 13 "
5	0.02	18 ~ 7 "

- (2) スイッチング管制御用パルス分配計数管回路 (V_4 : 12AU7,
 V_5 : 12AU7, V_6 : $\frac{1}{2}$ 12AU7, $V_7 \sim V_{11}$: 12AX7, DM10B-1)

本回路は単安定マルチ・バイブレータ 2 個 (12AU7 \times 2), ダブルパルスデカトロン 1 個 (DM10B-1), デカトロン駆動回路 ($\frac{1}{2}$ 12AU7) および出力パルス増幅回路 (12AX7 \times 5) より成り、上記クロック・パルス発生回路からの $T/5$ 周期のクロック・パルスを基にして、スイッチング管 ($S_1^{(i)} S_2^{(i)}$ $i=1\sim 5$) を図 10.23 のタイムチャートに従ってオン・オフするパルスを発生するものである。

いま単安定マルチバイブレータ V_5 の回路がないものとする、図 10.29 (a) に示すパルス発生回路よりのクロック・パルスにより、単安定マルチバイブレータ V_4 がトリガーされ、プレート V_{41} には同図 (b) に示すような $T/5$ 周期の一定パルス列のパルス列を発生する。このパルス列は V_6 により、極性反転増幅され、デカトロン駆動回路に入り、デカトロンの各カソード出力端子より得られる電圧は同図 (c) に示すようになり、1 つのカソードについて考えれば、周期 $2T$ 毎にほぼ $T/5$ の巾の矩形パルスが得られることになる。

ここで単安定マルチバイブレータ V_5 を考える。本マルチはデカトロン・カソード 2, 4, 6, 8, 10 より出力電圧、すなわち放電がこれらの電極へ移った際の微分電圧によってトリガされ、時定数

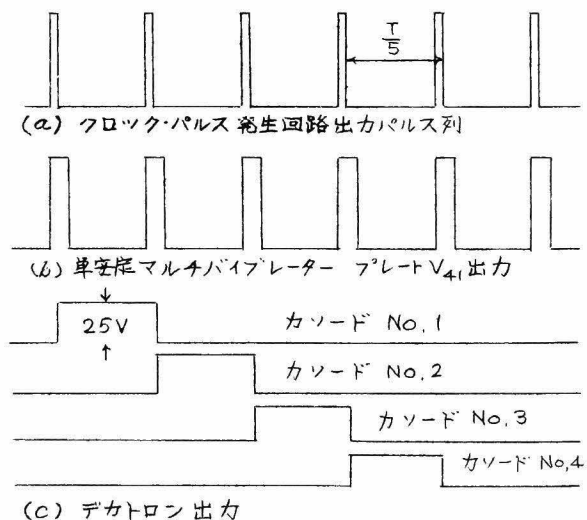


図 10.29 Pulse Distributor
 パルス発生原理

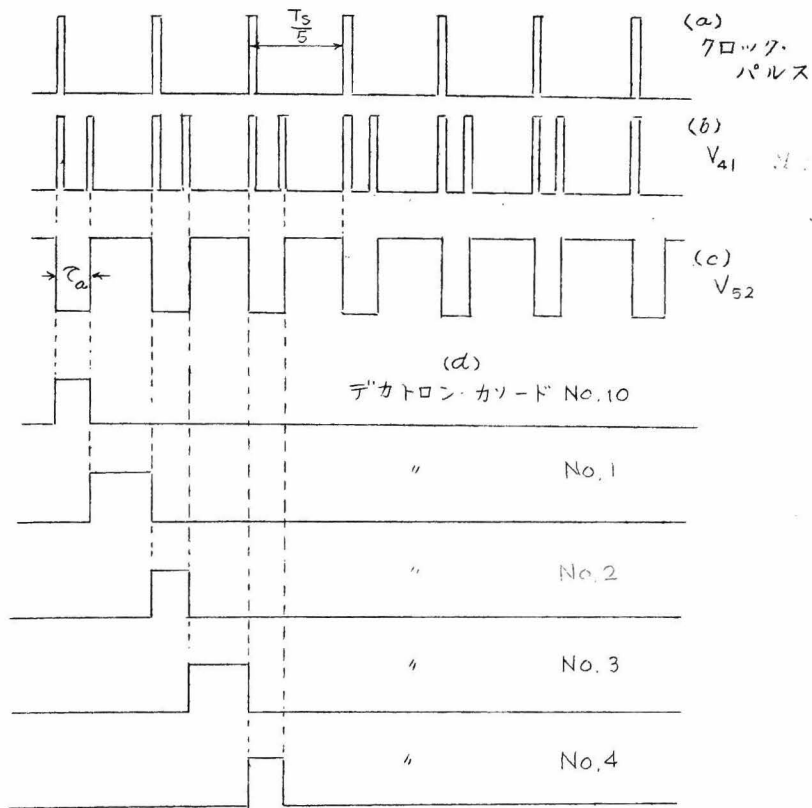


図 10.30 Pulse Distributor 発生パルス

RC できまる準安定時間の後、元の状態に復帰する。この復帰の際のプレート電圧変化によって、前述の単安定マルチ V_4 が再びトリカされる。したがって、主要部分の出力電圧波形は図 10.30 に示すようになる。そこで同図(d) に示されているデカトロン出力電圧を、表 10.2 に示すような組合せで Plug in Unit No. 1~No. 5 のスイッチング管のグリッドに接続することにより、図 10.23 に示した所要のタイム・チャートにしたがう動作をさせることができる。ただし、すでに Plug in Unit のところで述べたように、三極管スイッチのグリッドには、これをパル

デカトロン・カソード No.	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
スイッチング 管	$S_1^{(1)}$	$S_2^{(1)}$	$S_1^{(2)}$	$S_2^{(2)}$	$S_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$	$S_1^{(4)}$	$S_2^{(4)}$	$S_1^{(5)}$	$S_1^{(6)}$

表 10.2

スの無いとき、これをオフの状態に保つため、到来する信号電圧の負の最大値以上の大きさの負電圧がかかっている。したがって、これをオンにするためには、できるだけ管内抵抗を低くし、 r'' を小さくする目的から、グリッドをカソードに対し、やや正になるよう保つ必要がある。 $V_7 \sim V_{11}$ はこの目的に設けられたデカトロン出力パルス増巾回路を構成するものであり、本回路はデカトロン出力と同じ正方向パルスを得るようにするためカソードを入力とし、グリッドは定電圧に保たれている。図 10.31 は本回路出力パルスの電圧関係を示したものである。

ポテンシオメータ P_A (Screw drive) は単安定マルチ V_5 の時定数 RC を変え、Plug in Unit No. 0 のサンプリング時間で τ_a (記憶回路 A の記憶操作時間) を調整するものである。調整可能範囲は本試作装置では図 10.32 に示すように約 8 ~ 13 msec である。

半固定ボリューム $VR1, VR2$ は単安定マルチの Stability 調整用である。

10.9.3 外部接続回路 (コンソール側配線)

図 10.33 は Plug in Unit 入力回路で制御装置への入力電圧 (偏差信号) はヘリカル・ポテンシオメータ (50K Ω 10 回転) を通し、Plug in Unit の α 端子、すなわち R_2^* (1M) に直列につながれる。したがって、スナップ・スイッチ S_2 をオフにすれば、結局入力抵抗は $1M + 1M = 2M$ となり、

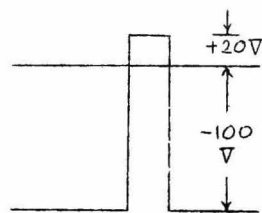


図 10.31 Plug In Unit 制御用パルス

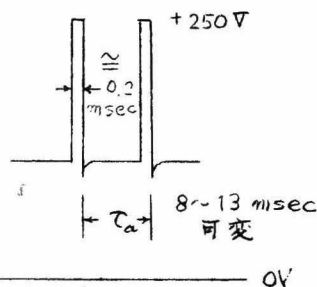


図 10.32 Plug In Unit 制御用パルス巾調整原理

1. 100

2. 100

3. 100

4. 100

5. 100

6. 100

$$D_F^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \alpha_k \quad (0 \leq \alpha_k \leq 1)$$

(10.27)

なる伝達関数で表わされる制御装置となり、 S_2 をオンにすれば、

$$D_F^*(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} \alpha_k$$

(10.28)

なる制御装置として使用できる。試作装置コンソールには上記回路が各 Plug in Unit No. 1~No. 5 に対し、それぞれ 1 回路ずつ用意されている。

図 10.34 は以上説明した Plug in Unit, Pulse Distributor, Plug in Unit 入力回路、電源および、各種メータ、スイッチ類との相互接続を行うコンソール固定のソケットの配線を示したものである。

なお、本装置の電源はフィラメント・トランス 2 個 (15A, 6.3V, 9A, 6.3V) および、電圧調整直流電源 (+250V, -150V, -300V) より成る。

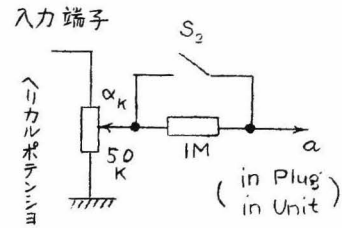


図 10.33 Plug In Unit 入力回路

10.10 試作装置動作試験

本試作装置が規定通りの動作をしているかどうか、各 Plug in Unit の間に相互干渉がないかどうかをしらべるため、アナログ・コンピュータと組合せ、簡単な系について動作させて見る。

(1) 積分性制御対象に対する P+I 制御例

図 10.35 (a) に示す制御系について考える。(b) はこれをアナログコンピュータ演算素子、試作制御装置を用いて構成したものである。

図 10.36 のデータはサンプリング周期を色々かえた場合の出力応答である。

いま出力 $y(t)$ の z 変換を $Y^*(z)$ とすれば $Z[H(s)/S] = Tz^{-1}/(1-z^{-1})$

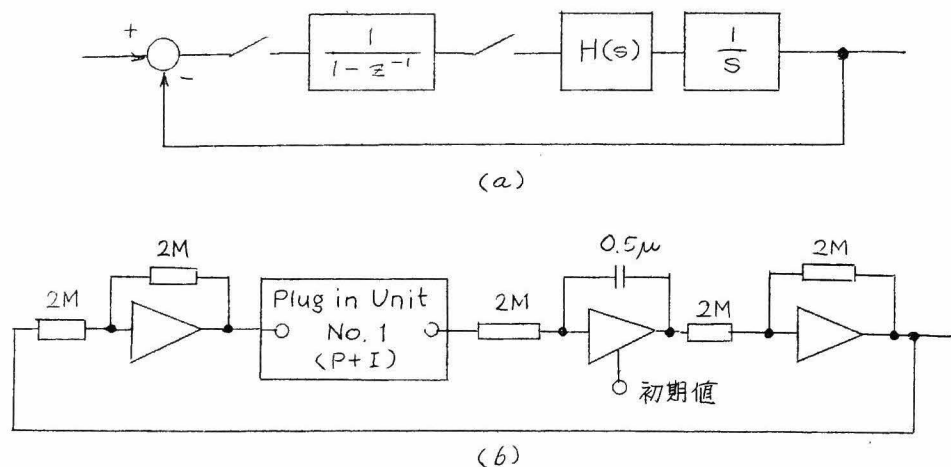


図 10.35 試作制御装置とアナログコンピュータとの結合演算回路

より、

$$Y^*(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - 2\left(1 - \frac{T}{2}\right)z^{-1} + z^{-2}} \quad (10.29)$$

一方、正弦波関数 $\sin \omega t$ の z 変換は

$$Z[\sin \omega t] = \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \quad (10.30)$$

上記両式を比較することにより、出力応答はサンプリング時点に関しては正弦波関数を T 秒毎にサンプルしたものになり、かつ T を短くして行くと、 $\omega \rightarrow 0$ すなわち、その正弦波の周期が長くなる。本演算例は波形の減衰または発散状態を検討することにより、制御装置がどの程度正確に $1/(1-z^{-1})$ なるパルス伝達関数を実現しているかがわかる。

(2) 2重制御実施の例 その1

本例は先の図 10.35 の制御系を Plug in Unit No. 1 を使って構成し、Plug in Unit No. 2 を図 10.37 の制御系の構成に用い、両者を同時に演算させたものである。図 10.38 のデータは Plug in Unit No. 2 の系に対し、外乱としてステップを加えた場合の制御量かよび、

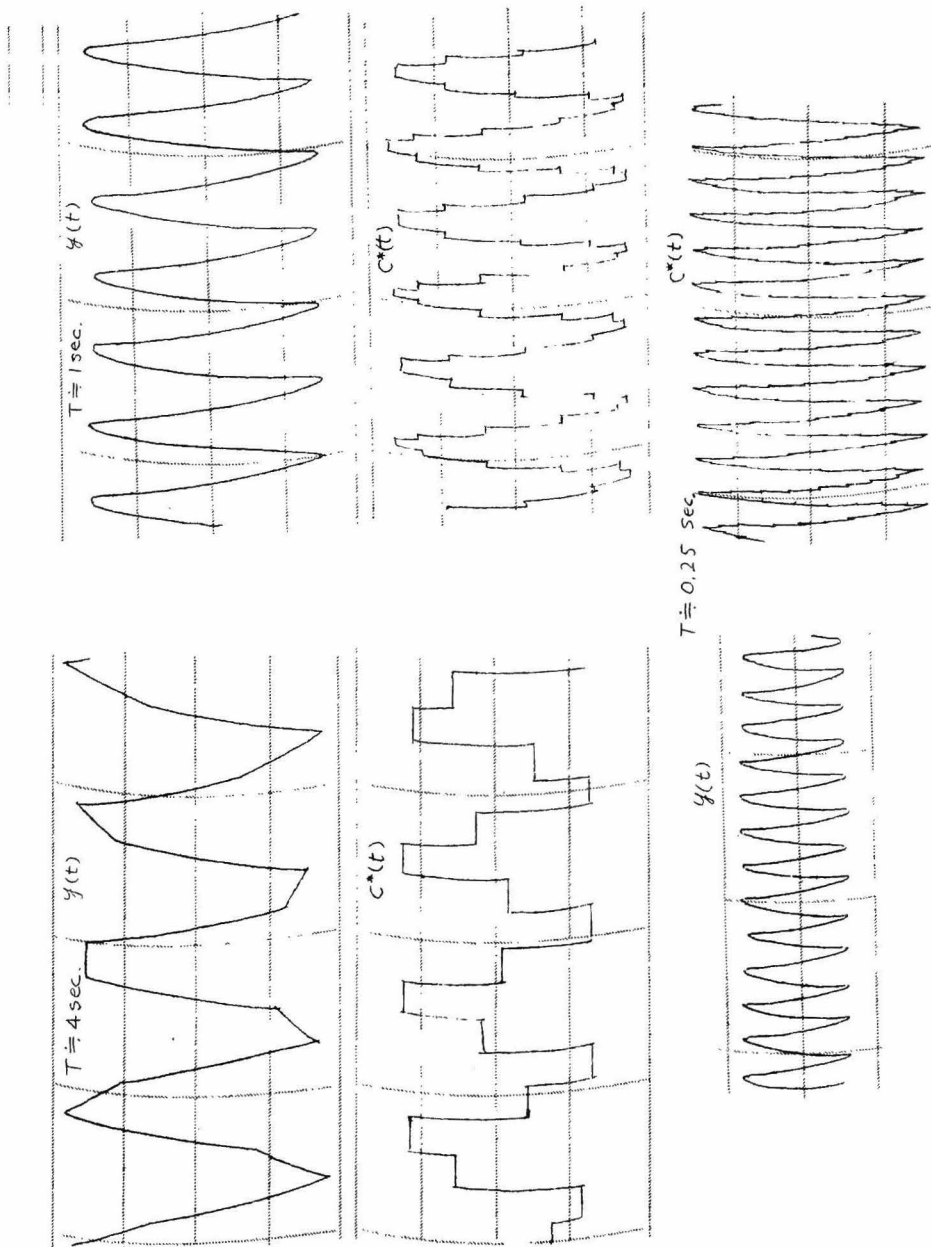


図 10 36 図 10.35 の系の応答

Plug in Unit 出力 (図 10.37における零次ホールド回路出力) を示したものである。

これらのデータよりわかるように、制御装置が積分特性を含むため、オフ・セットは存在しない。

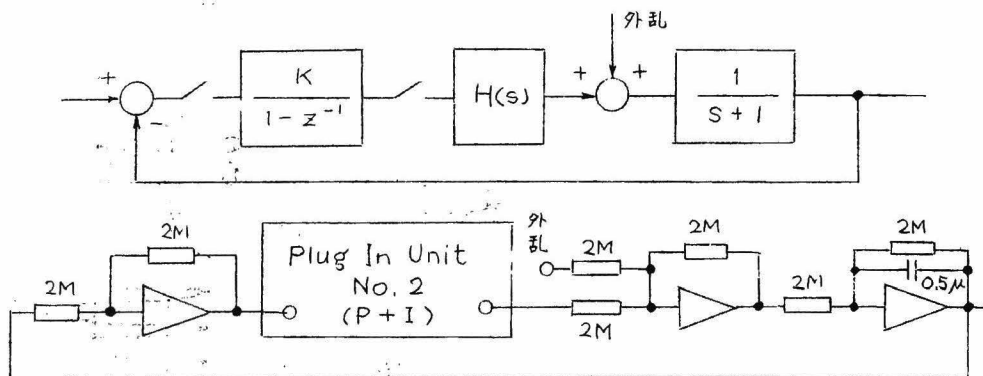
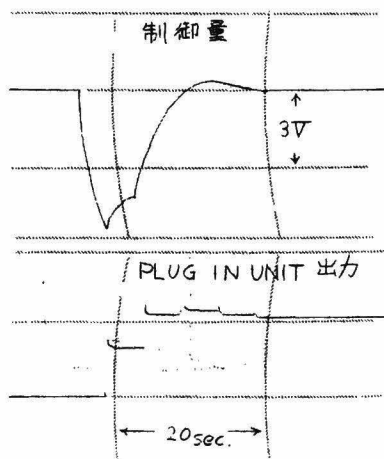
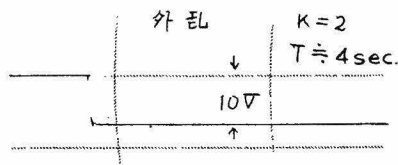
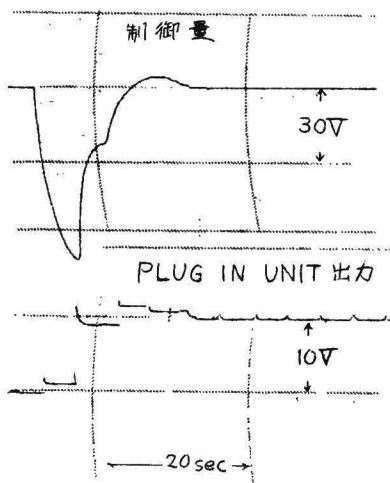
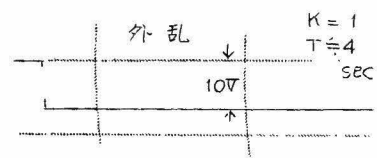


図 10.37 アナログコンピュータを用いての2重制御実施例その1 (Plug In Unit No. 1を用いて図 10.35の系を同時に構成した)



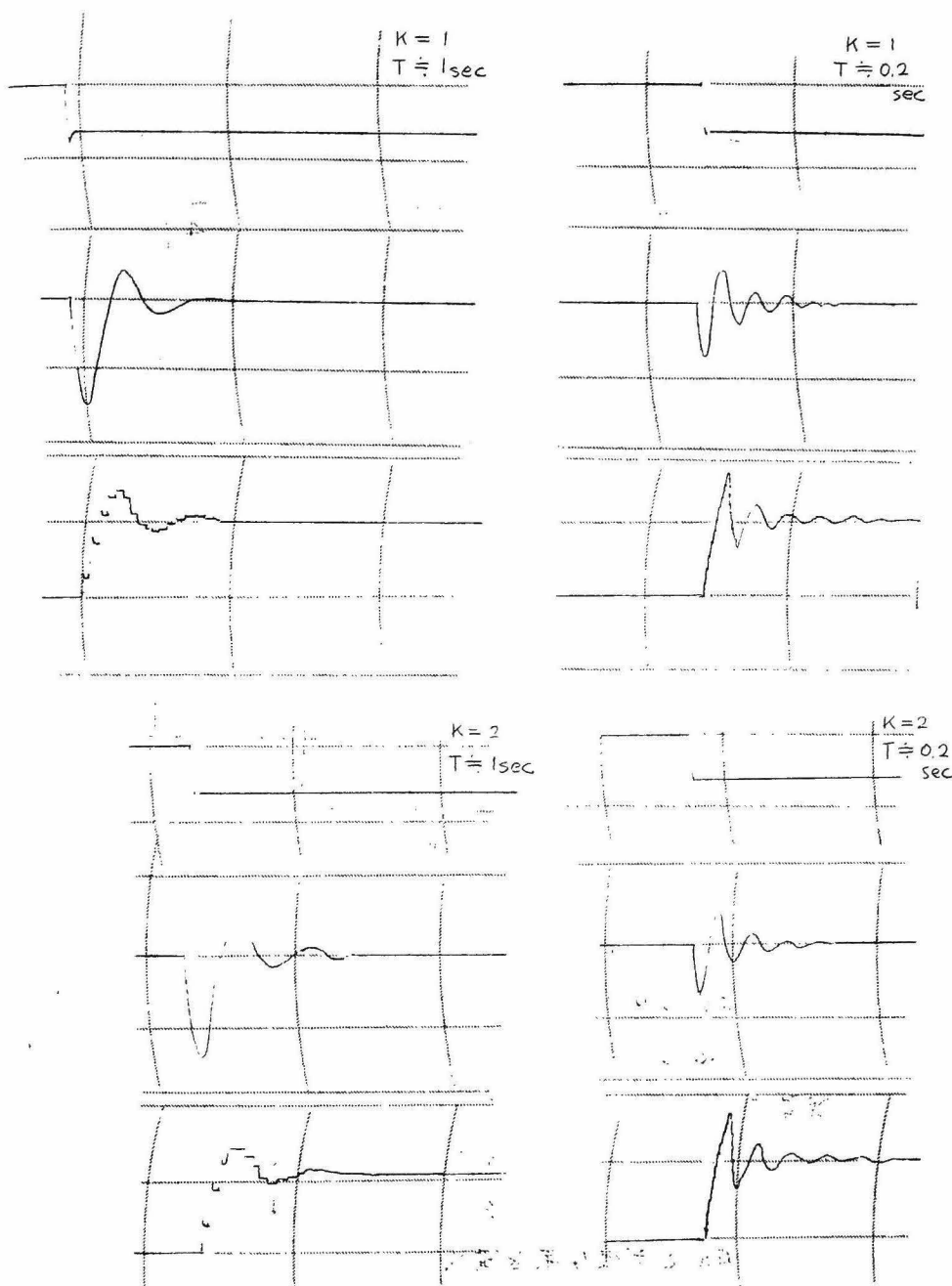


図 10. 38 図 10. 35, 10. 37 の系の同時演算
(2重制御) 結果 (図 10. 37 の系の応答のみを
示す)

図 10.39 のデータは Plug in Unit No. 2 のスナップ・スイッチ S を P 側（比例演算）に入れた場合で、系には積分要素が存在しないため、オフ・セットが現れている。

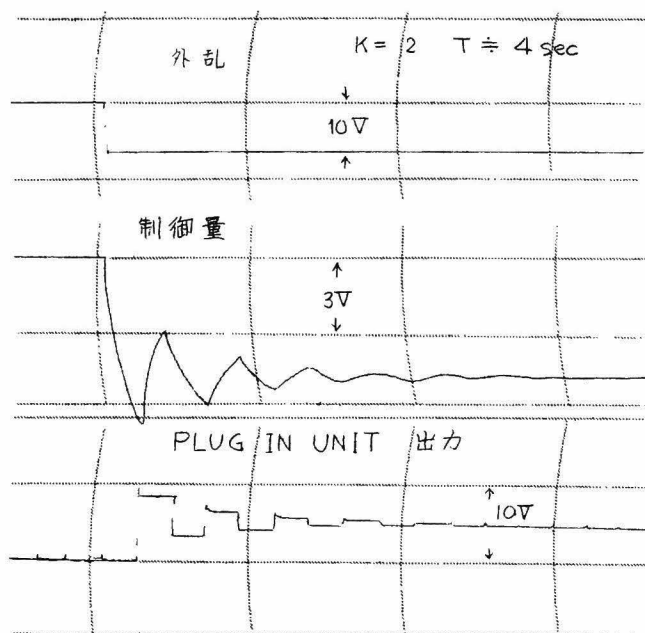


図 10.39 サンプル値比例制御演算結果

(3) 2重制御実施例

本例は先の図 10.35 の制御系を Plug in Unit No. 1 を使って構成し、No. 2, No. 3 を図 10.40 の制御系の構成に使い、やはり両者を同時に演算させたものである。ただし Plug in Unit No. 2 は制御対象の有するむだ時間特性を模倣するために用いたものであり、S を P 側に入れることにより、図 10.23 のタイムチャートより明らかなように、 $T_L = 4T/5$ のむだ時間と等価な系を構成した。

図 10.41 は Plug In Unit No. 3 の K_c を 0.5 にえらんだ場合の応答、図 10.42, 10.43 はそれぞれ $K_c = 1$ および 2 にえらんだ場合の応答である。

また、図 10.44 は Plug In Unit No. 1 の系の応答（1/s 出力）と、

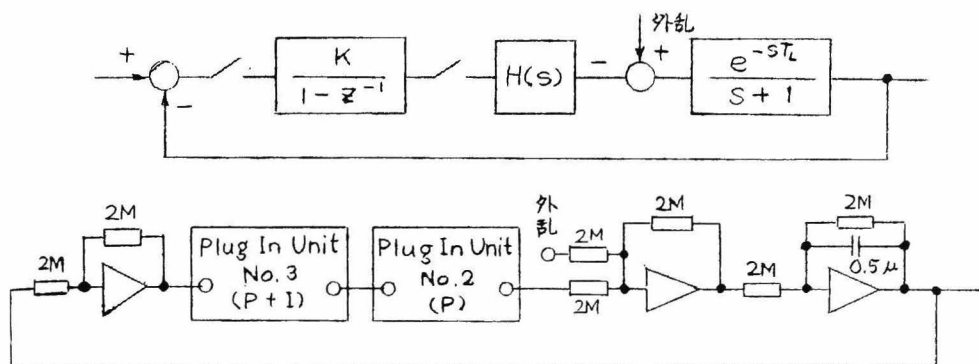


図 10.40 アナログ・コンピュータを用いての 2 重制御実
施例 その 2 (Plug In Unit No. 1 を用いて図 10.
35 の系を同時に構成した)

Plug In Unit No. 2, No. 3 を用いた系の応答を同時に記録したもので、
Plug In Unit No. 0 は 2 種類の系に対し相互干渉なく、使い分けら
れていることがわかる。

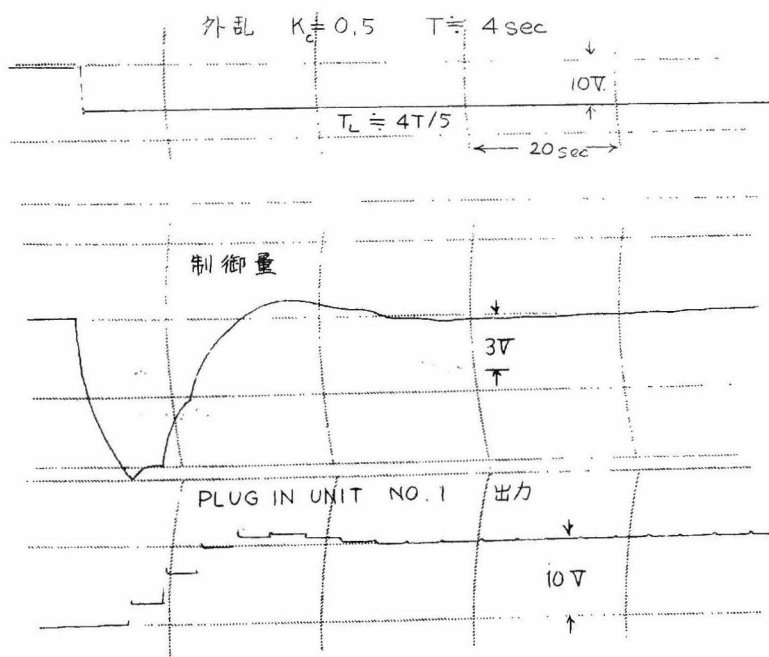


図 10.41 図 10.40, 10.35 の系の同時演算結果 (図 10.40
の系の応答のみを示す) Plug In Unit No. 3 $K_c = 0.5$

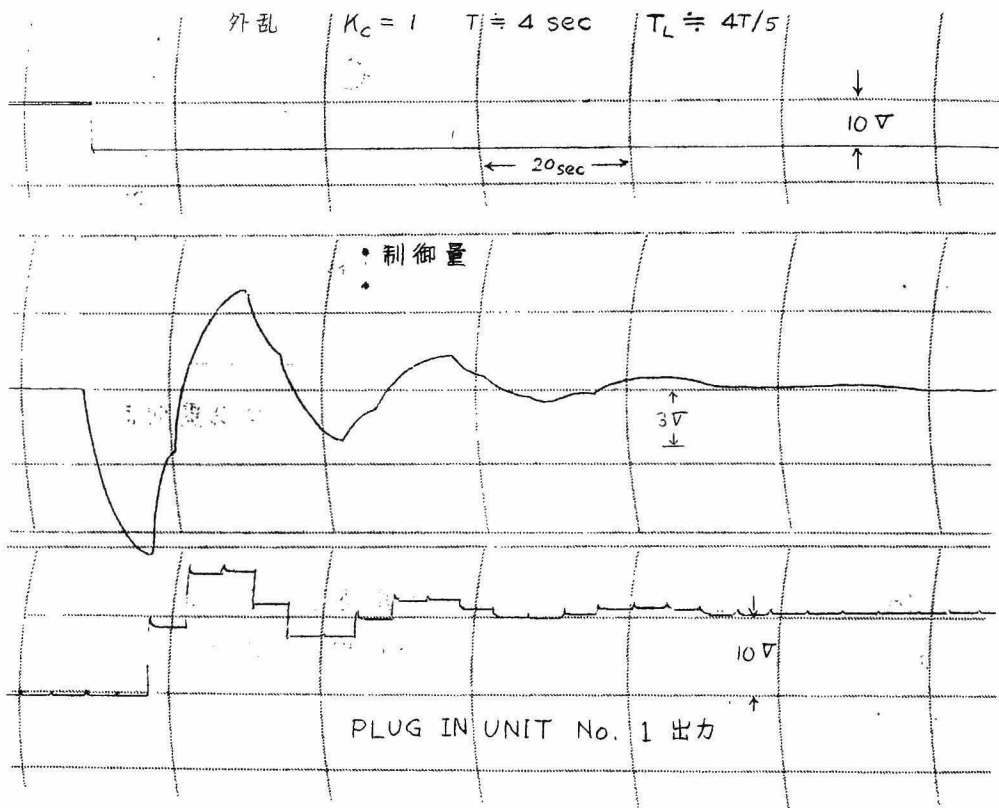


図 10.42 図 10.40, 10.35 の系の同時演算結果 (図 10.40 の系の応答のみを示す)

Plug in Unit No. 3 $K_c = 1.0$

10.11 工場実験例

10.3 および 10.4 における検討結果より明らかなように、線速 v が $a < v_0 < 2a$ におさまる今回シミュレーションの対象となった芯線被覆機キャパシタンス制御系統における使用速度に対して、線速 v_0 と最適サンプリング周期 T 、ループゲイン $K_c K_0$ との間にはほぼ

$$T \cong 1.36 T_L \quad (10.31)$$

$$K_c K_0 \cong 2.35 K_0^2 \quad (10.32)$$

で表わされる関係が成立する。ただし、これらの式における K_0 , T_L は図 10.2 に示す芯線被覆機構 1 次おくれ特性のゲイン定数および、むだ

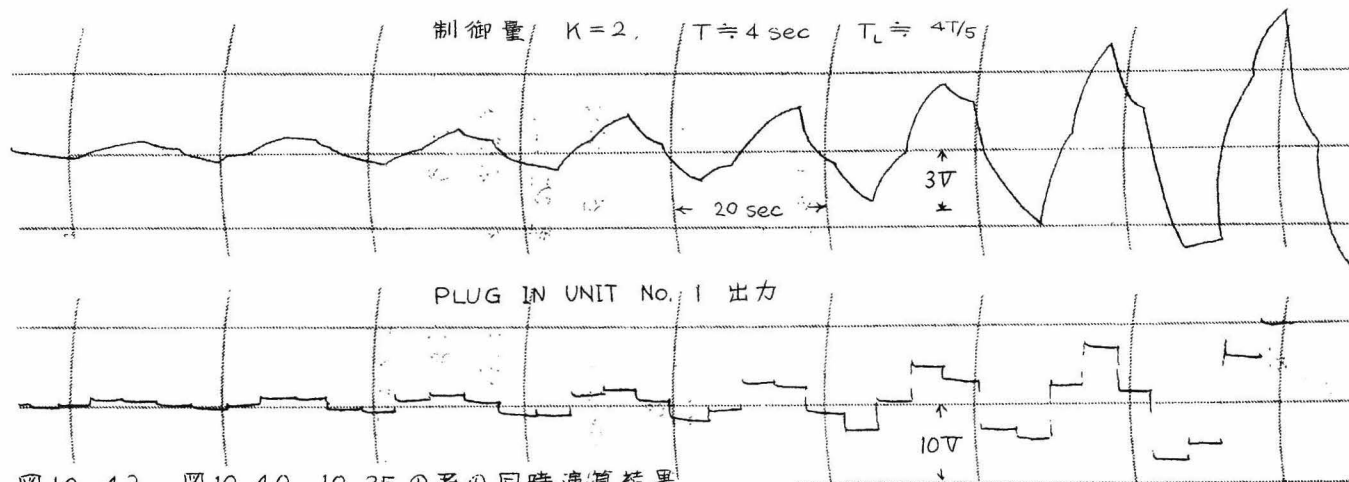


図 10 43 図 10.40, 10 35 の系の同時演算結果

(図 10.40 の系の応答のみを示す) Plug In Unit No. 3 $K_c = 2.0$

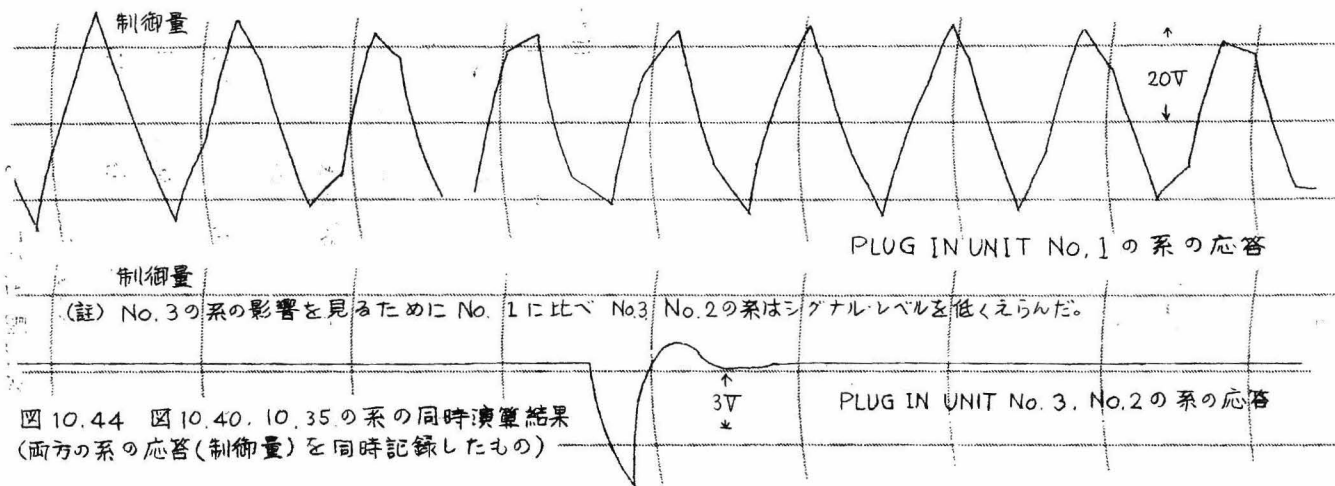


図 10.44 図 10.40, 10.35 の系の同時演算結果
(両方の系の応答(制御量)を同時記録したもの)

時間であり、 T_{L0} および K_c はそれぞれ、冷却水槽中を線が走ることに
よるむだ時間および制御装置のゲインである。

ところが、系の有する全むだ時間 T_L と線速 v_0 との間には明らかに

$$T_L = T_2 + \frac{\ell}{v_0} \quad ; \quad \ell \text{ 冷却水槽の長さ} \quad (10.33)$$

なる関係が成立する。したがって使用線速 v_0 ($\alpha < v_0 < 2\alpha$) に対し
てサンプリング周期 T は

$$T \cong 1.36 T_L = 1.36 \left(T_2 + \frac{\ell}{v_0} \right) \quad (10.34)$$

と設定すればよい。

また、線速が v_0 から Δv だけ変化したとき、キャパシタンス検出器
に現れるキャパシタンス変化量 ΔC は、線速 v_0 におけるキャパシタン
ス値 (単位長当り) を C_0 とすれば

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_0 \frac{\Delta v}{v_0} \quad \text{すなわち、} \quad \Delta C = \alpha_0 \frac{C_0}{v_0} \Delta v \quad (10.35)$$

と表わされる。 α_0 は被覆材料その他で決まる定数で、各材料につき、
実験的に求められている。上式からわかるように、線速 v_0 に比例して
キャパシタンス検出器若しくはサーボ増巾回路等のゲインを変更すること
により、線速変更によるキャパシタンス検出器のゲインを等価的に一
定に保つことができ、常に式 (10.33) を満足するようループゲインを
決定することができる。

ただし、これら最適サンプリング周期、ゲイン定数の設定は図 10. 7,
10. 8, 10. 9 および 10. 10 より明らかなようにそれほど厳密を期する
必要はなく、式 (10. 31), (10. 32) の値は使用するサンプリング周期お
よび、ゲインの大略の見当をつけるのに使用すればよい。例えば、図 10.
8 (a), (b) において τ_s を最適値 1.36 に保ったまま、 k_c を、そ
の最適値 2.35 から 3.6 および 1.03 まで、ほぼ $\pm 50\%$ 変化しても、
 $\gamma_x(n\tau_s)^2 = \gamma(\tau)^2$ の値は、最適値設定時の値 $\cong 0.65$ から 0.75 ~
0.8 程度に増えるだけである。

シミュレーションにあたり要求された事項は製品被覆線の単位長当りのキャパシタンスを設定値 C_0 の $\pm 2\text{PF}$ 程度におさめることである。図 10-43(a) は発泡ポリスチロール被覆線製造工程において、非制御時 ($K_c = 0$) においてキャパシタンス検出器に現れた設定値 C_0 からのキャパシタンス偏差を記録したデータであり、周期 f_0 、振巾 $\pm 1 \sim 1.5\text{PF}$ の外乱と約 $f_0/10$ 以上の長周期外乱、および運転時間経過に伴う、被覆材料の熔融状態、発泡状態の変化に基づくドリフト状キャパシタンス変化によって、非制御のまま放置すると製品の単位長当りのキャパシタンスは C_0 から大きく変動することになる。

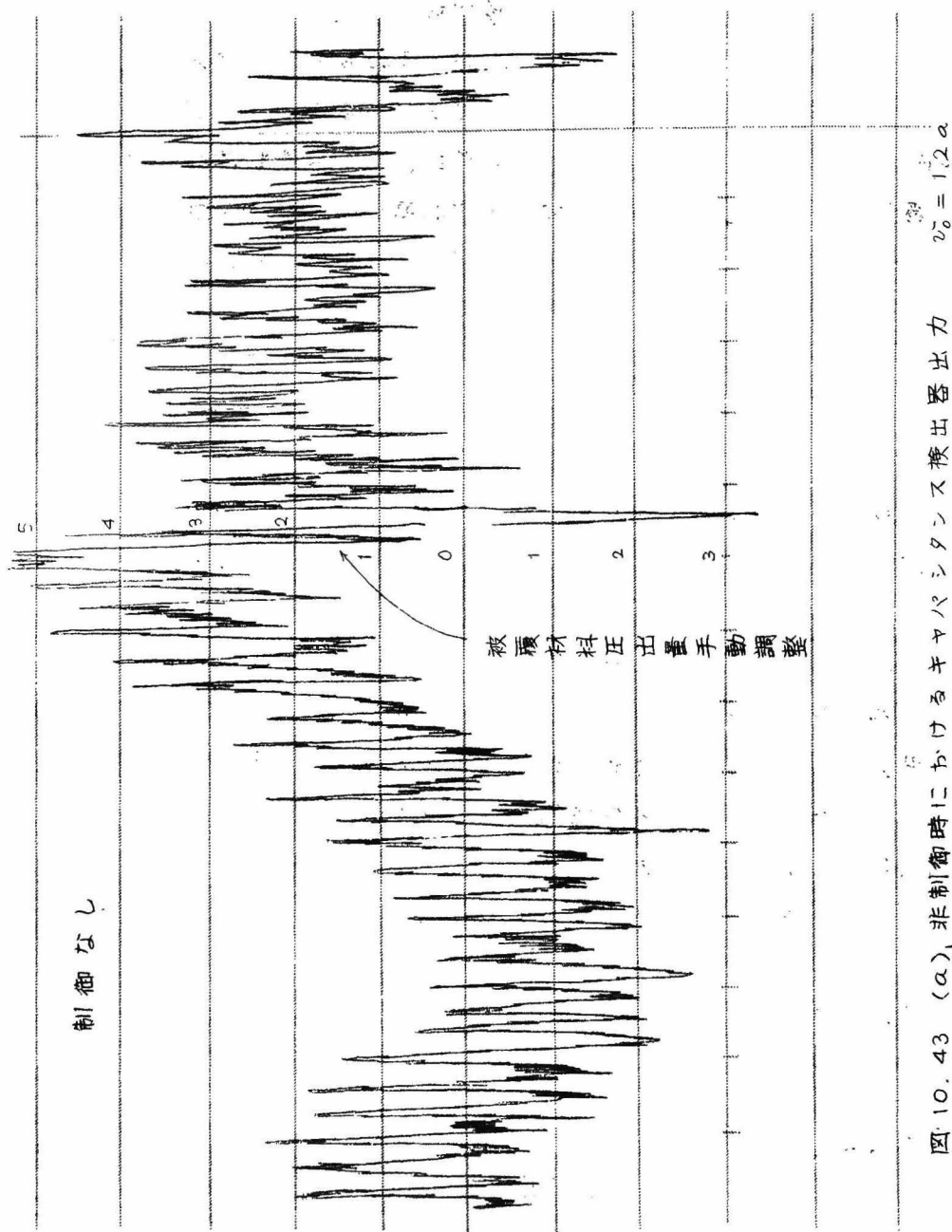
同図 (b), (c) は本装置を用いた場合の実測データで、サンプリング周期 T 、使用線速 v_0 、ゲイン K は図に記入せるとおりである。なお、図中 T_{opt} , K_{opt} とあるのはその場合の使用線速における計算から得られた最適サンプリング周期およびゲインである。

同図 (d) は比較のため従来行なわれていた連続動作調節計 (比例+積分) による制御結果の 1 例を示したもので、調節計の調整パラメータの値は図に記入せる如くである。

これらのデータを比較検討することにより明らかなように、本多重制御装置により、近似 (比例+積分) サンプル値制御を実施することにより、制御系個々に連続動作調節計を用いて制御を行なった場合と同等の成果を得、 f_0 周期、振巾 $\pm 1 \sim 1.5\text{PF}$ の外乱を除くことはできないが $f_0/10$ 周期外乱および、ドリフトに基づくオフ・セットはこれを除去することができ、キャパシタンス変動を設定値 C_0 の \pm 約 2PF におさめる目的を達している。

10.12 本試作装置の任意パルス伝達関数発生装置としての応用

以上説明を行なった $D_F^*(z) = K_c / (1 - z^{-1})$ なるパルス伝達関数で表わされるサンプル値制御方式は、従来の連続動作調節計を用いた場合に



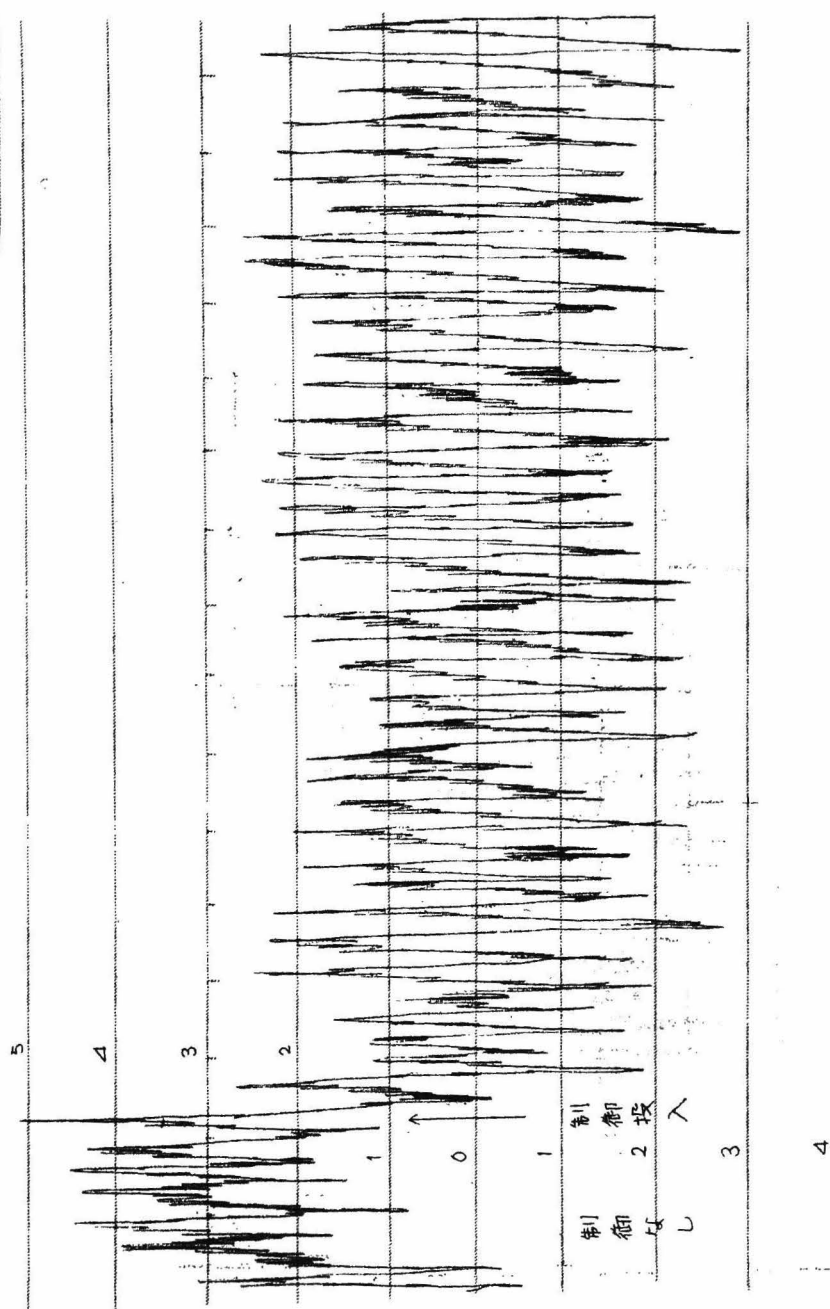


図 10.43(6) サンプリング制御実験 $\nu_0 = 1.2\alpha$ $T = 1.02 T_{opt}$ $K = 0.25 K_{opt}$
 (T_{opt} , K_{opt} はセンセシスの結果得られたサンプリング周期およびループゲインの最適値)

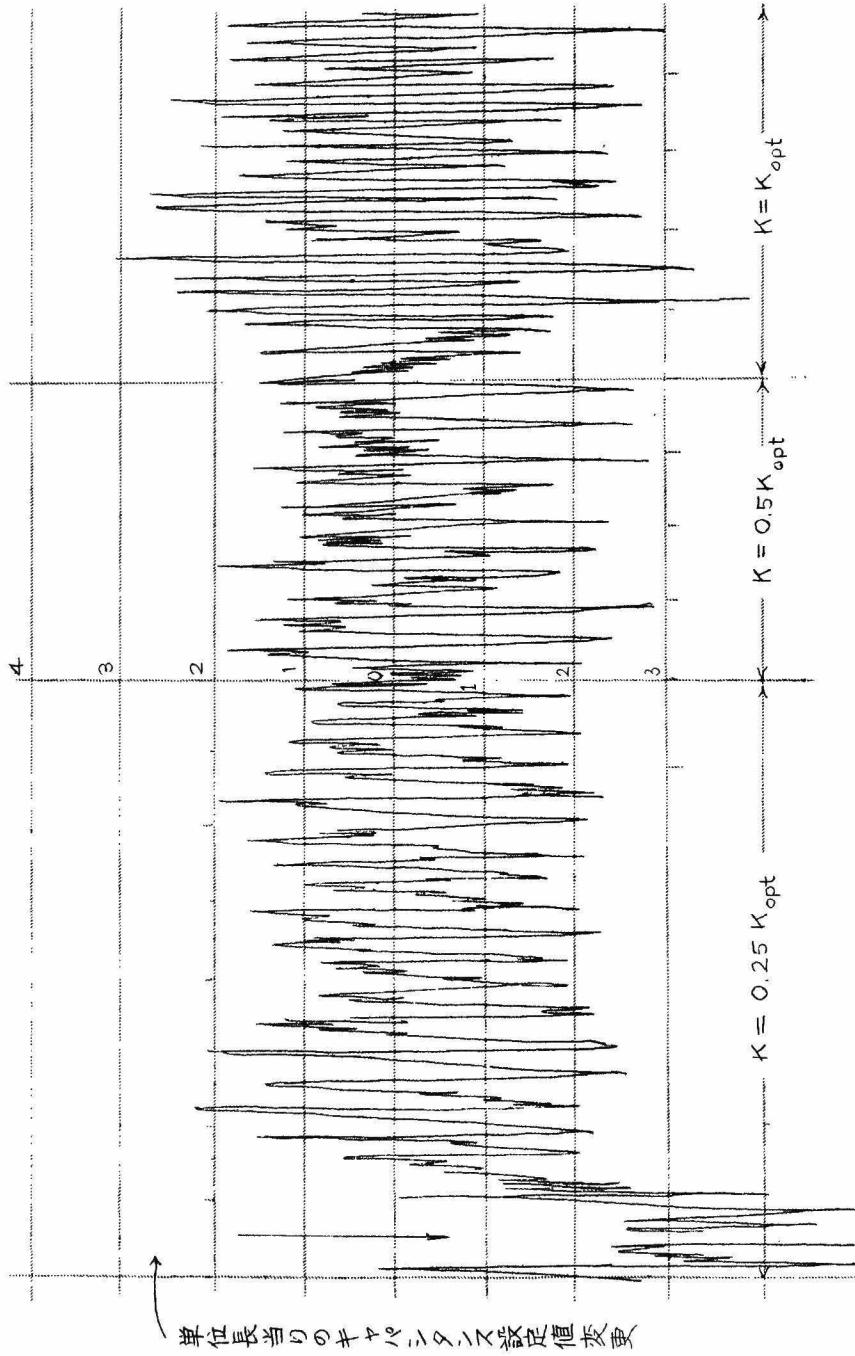
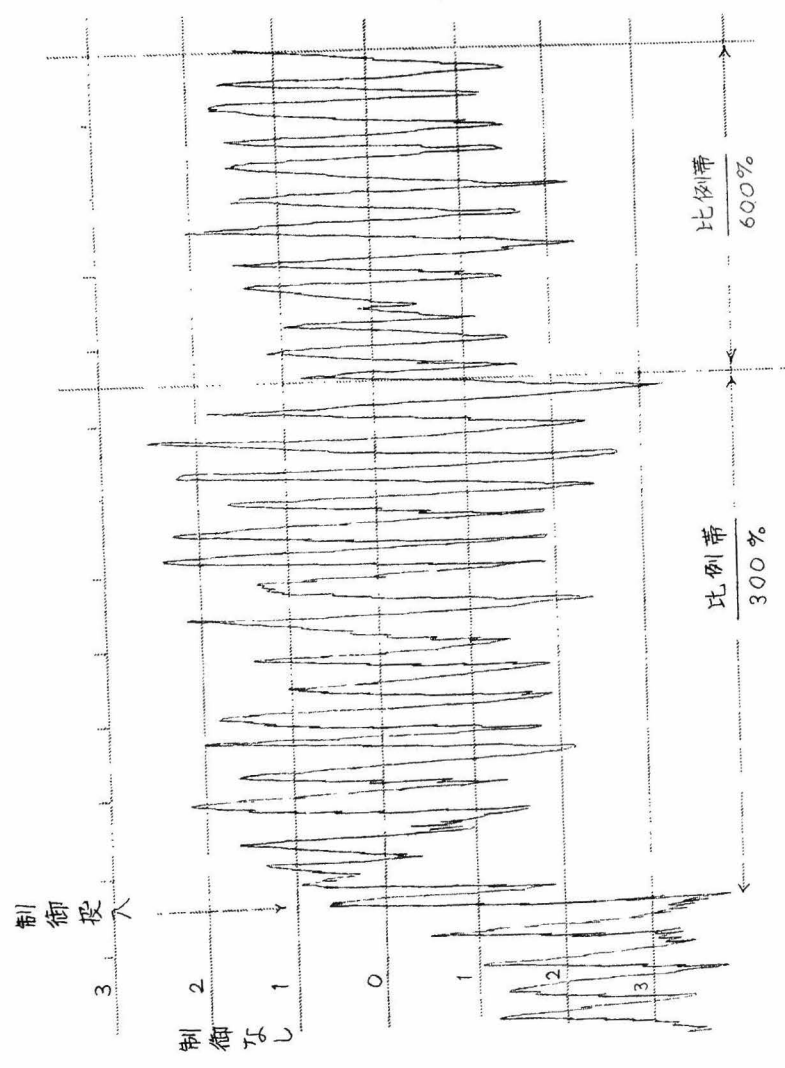


図 10.43(c) サンプルン グ 制 御

$$\nu_0 = 1.2 \alpha \quad T = 0.55 T_{opt}$$



四 10.43 (d) 連続"比例+積分"制御
 $\nu_0 = 1.2\alpha$, 積分時間 2 sec.

おける経験、および多重制御を実施するにあたってその構造の簡単化を基としてえらんだものであり、現場向き制御装置として製作、保守が容易であつて、しかも十分連続動作調節とおきかえうる性能を有する。

しかしながら、例えば有限整定時間応答等、制御方式が更に高級になった場合、一般にサンプリング制御装置 $D_F^*(z)$ としては更に複雑なパルス伝達関数が要求されることになる。

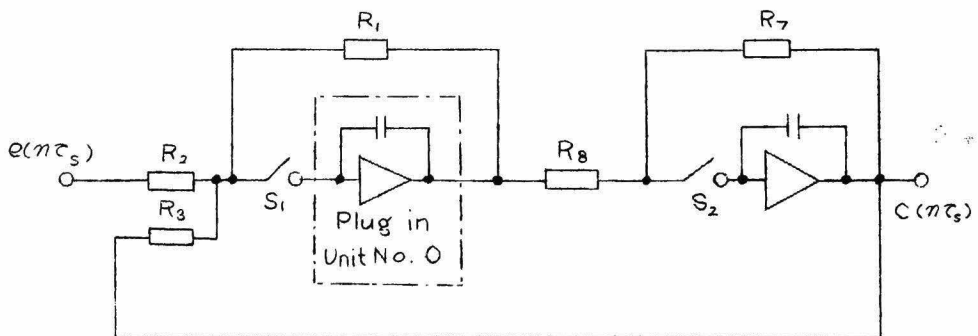
本試作装置は各 Plug in Unit のフィードバック抵抗の改変、Plug in Unit と Plug in Unit との組合せにより、可成り広範囲のパルス伝達関数を実現する任意パルス伝達関数発生装置として使用することができ、ここにその 1 2 を示せば、

(1) Plug in Unit のフィードバック抵抗をかえる場合

図 10.44 は Plug in Unit の基本回路を示したものである。その入力特性を各演算抵抗 $R_1 \sim R_8$ を使って表わせば、

$$c(n\tau_s) = \left(-\frac{R_1}{R_2} e(n\tau_s) + \frac{R_1}{R_3} c((n-1)\tau_s) \right) \frac{R_7}{R_8} \quad (10.36)$$

一方、 $K/(s+a)$ のパルス伝達関数は



(註) $c(n\tau_s)$ と $e(n\tau_s)$ との間には Plug in Unit No. 0 の動作時間に相当するむだ時間がある。

図 10.44 Plug In Unit のフィードバック抵抗の改変

$$Z\left[\frac{K}{s+a}\right] = \frac{K}{1-e^{-aT}z^{-1}} \quad (10.37)$$

この要素の入出力パルスの関係は明らかに

$$c(nT_s) = Ke(nT_s) + e^{-aT}c(\overline{n-1}T_s) \quad (10.38)$$

現在の装置では $R_1 \sim R_8$ は $R_2 = 1M\Omega$ の他はすべて $2M\Omega$ の精密固定抵抗が入っている。したがって Plug in Unit No 1~No.5 の入出力間には、

$$D_F^*(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} \quad (10.39)$$

なるパルス伝達特性が存在する。(実際には更に零次ホールド回路を兼ね具えている) 式(10.36), (10.38)より明らかなように R_1R_7/R_2R_8 , R_1R_7/R_3R_8 の値をかえることにより S 平面において実数極を有する連続要素 $K/(s+a)$ のパルス伝達関数を実現することができる。 a と R_1R_7/R_2R_8 の間にはつぎの関係がある。

$a > 0$: 負の実数極(安定伝達要素) $\frac{R_1R_7}{R_2R_8} < 1$ にえらぶ。

$a < 0$: 正の実数極(不安定伝達要素) $\frac{R_1R_7}{R_2R_8} > 1$ にえらぶ。

なお、すでに説明した通り、Plug in Unit スナップスイッチ S を P 位置におけば $R_3 = \infty$ となり、

$$D_F^*(z) = \frac{R_1R_7}{R_2R_8} \quad (10.40)$$

なる比例動作特性となる。

(2) Plug In Unit をカスケードに接続する場合

図 10.45 に示すように 2 つの Plug in Unit をカスケードに接続し、1 つを(比例+積分)動作、1 つを(比例動作)とすると、

$$C(nT_s) = Ke(nT_s) + \alpha_1 c(\overline{n-1}T_s) + \alpha_2 c(\overline{n-2}T_s) \quad (10.41)^*$$

* 実際には、 $C(nT_s)$ と $e(nT_s)$ の間には Plug in Unit No.0 の動作時間、両 Plug in Unit の動作時間位置の相違に基づくむだ時間を含む。このむだ時間は使用 Plug in Unit のえらび方を変えることは図 10.23 より明らかである。

で表わされるような入出力パルス関係を得る。

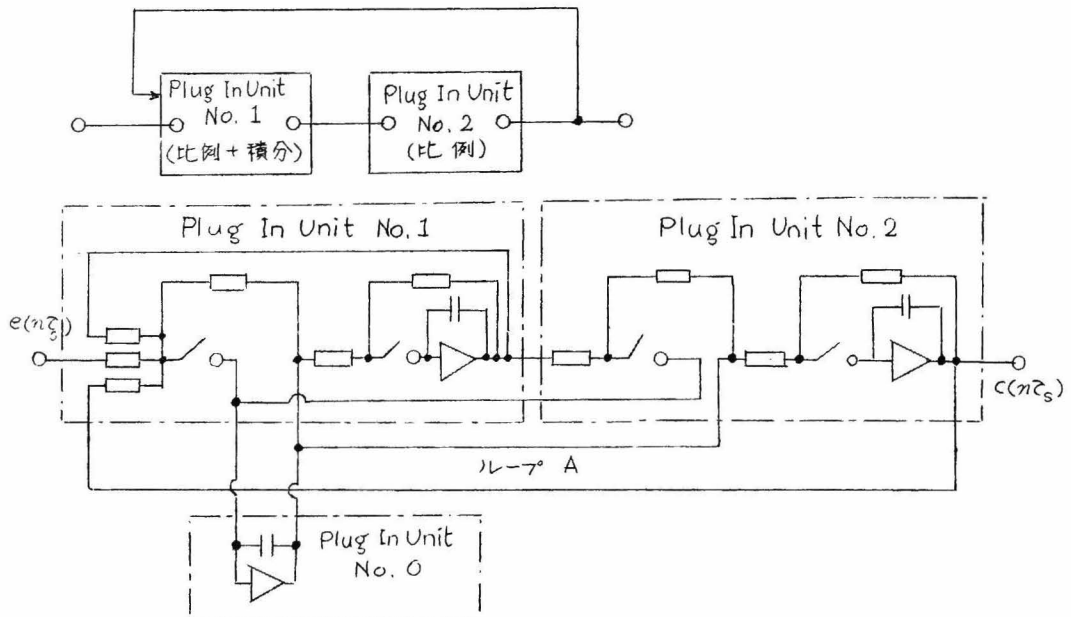


図 10.45 Plug In Unit の従続接続

式(10.41)における K, α_1, α_2 はすべて正であるが、例えば図10.45のループAに符号変換器を入れることにより α_2 の符号を負にすることができる。 $K > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$ は一般に、

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho kT} \sin \beta kT \cdot \delta(t - kT) \quad (10.42)$$

なるインパルス応答を有する2次振動系のパルス伝達関数である。

以上のように Plug In Unit のフィードバック量の変更、カスケード接続を組合せることにより可成広範囲のパルス伝達関数を実現することができる。

結 言

本論文第Ⅰ編は線形サンプル値系に関する基礎理論並びに、サンプル値系における最適制御の1つと考えられる有限整定時間応答の問題を取り上げたものである。

サンプル値制御理論は系の内部に連続信号部分と不連続信号部分とが同時に存在するため、原理的には連続制御よりもむしろ早くから実際応用が試みられて来たにもかかわらず、その大系化が遅れていた。この点にかんがみ、第2章においては線形サンプル値系の基礎的解析手段として知られている z 変換法およびインパルス変調法とは異った解析手段、すなわち京都大学工学部近藤教授により提唱された断続回路理論を応用せるカット・オフ・オペレータ法を利用した新解析法の開発を試みた。前者、すなわち z 変換法並びにインパルス変調法と本方法の比較を行えば、

1. z 変換法およびインパルス変調法は系の有するサンプリング機構が純パルスサンプリングの場合に対し開発されたものであり、実際上多く見うけられる有限パルス巾サンプリング機構を有する系の場合については、後に G. Farmanfarma によって開発された P 変換法による必要があった。これに対し、カット・オフ・オペレータ法による解析法においては、サンプリング方式の変更による誘導された基礎式の形に基本的な変更はなく、サンプリングパルス巾が系の動特性に与える影響を観察するのに都合がよい。

2. z 変換法およびインパルス変調法はそれぞれ、定差方程式の解法および、周期的インパルス列による連続信号のパルス変調に対する理論より出発したものであり、それらから得られる結果はサンプリング時点に関する情報のみを与えるものである。制御系として重要なサンプリング時点間の連続信号の平滑の度合など、“かげの応答”に関しては z 変換法を拡張した拡張 z 変換法を用うるなど二段がまえの解析法を用うる必要がある。これに対し、カット・オフ・オペレータ法による解

析法は本来、系の連続信号部分に注目した方法であって、例えば本方法によって得られる特性方程式の根はサンプリング時点間の応答を支配する要素を含んでおり、 z 変換法のみによる解析法の場合見すごす“かけの部分の不安定現象”などを見落す恐れはない。

3. カット・オフ・オペレータ法による方法は、適用の手軽さ、周波数領域での解析等の点においては z 変換法に劣るが、最近大きく取り上げられて来た可変定数系の安定問題などに関しては、これが新しい方法解決への途となる可能性を含んでいる。たとえば、ループゲインが周期的に変化するサンプル値系の解析に対しては本方法がそのまま適用できる。

つぎに第3章においては、サンプル値系における最適制御の一つである有限整定時間応答の問題をとりあげ、サンプル値フィードバック制御系前向き回路の途中に主操作量とは別に副操作量を供給することにより、系全体に要求される整定サンプリング回数を普通の場合のほぼ半分に短縮する方法につき述べた。またこの方法によれば副操作量は有限整定するに到るまでの過渡応答時のみ操作信号を供給するよう設計することも可能である。

本論文第Ⅱ編においては、サンプル値系における非線形の問題について考察した。

第4章および第5章の一部はサンプル値制御装置（デジタル型制御装置）を用いた有限整定時間応答系において、整定時間短縮を目的としてサンプリング周期を短縮することにより生ずる制御装置出力の飽和により、制御系の特性が如何に変化するかにについて解析したもので、その結果を要約すれば、

1. 外乱に対する考慮のなされていない有限整定時間応答系^{*}においては、少しでも飽和現象が生じた場合、有限整定の性質は失なわれてしまう。

* 次頁脚註参照

2. しかしながら有限整定という性質を除外した自乗制御面積等で表わされる制御系としての良さは少々の飽和によっては急激には変化せず、普通のフィードバック系と同様、飽和の度合いに応じ徐々に悪化する。

3. 外乱に対する考慮のなされた有限整定時間応答系^{*}においては、往々にして制御装置に不安定要素を用いなければならない場合があり、飽和現象により等価的にループゲインが低下した際、初期入力に依存する乱調現象を呈することがある。

第5, 6および7章においてはサンプル値系における非線形振動現象について考察した。

まず第5章においては、有限整定時間応答系における飽和による乱調現象に注目し、プロセス系およびサーボ系の代表的な伝達要素に対し有限整定時間応答補償を行なった場合における乱調発生条件の導出をこころみた。すなわち、

1 プロセス系はサーボ系に比し、外乱に対する特性が特に重視される。したがって、プロセス系の代表的な伝達関数と考えられる“1次おくれ+むだ時間”系に対し、上記外乱を考慮せる有限整定応答補償を行なった場合について検討を行い、その系に単位ステップ状目標値入力を投入した際、乱調現象を生じないために必要十分、若しくは十分な制御装置出力線形成と系のパラメータとの関係を見出した。この条件式より導かれる結果を要約すれば、乱調を発生させないために必要な線形成の大きさは系の有する“むだ時間”に対するサンプリング周期の選び方よりも、“1次おくれ時定数”に対するサンプリング周期の選び方が大きく関係し、特にサンプリング周期を系の時定数より大きく選んだ場合には、むだ時間の大きさは線

* ここに外乱に対する考慮のなされた有限整定時間応答系とは、特定目標値入力に対し、有限時間内にオフセットなく一致すると共に、ステップ或はランプ状等特定外乱が混入した際においても、有限時間内にその影響を完全に消失せしめうるよう設計された系である。

形域の大きさにほとんど影響を及ぼさないことがわかった。また、系が“むだ時間”を含まない場合には飽和の程度如何にかかわらず、乱調現象を発生せず、飽和離脱後、有限整定特性を回復することがわかった。

2. サーボ系においては系の途中に混入する外乱の性質が比較的明瞭で、系自体外乱による影響を少なくするよう設計することが可能である。したがってサーボ系においては外乱に対する特性よりも目標値に対する追従特性に重点をおかれるのが普通である。以上のような観点から、ここにおいてはサーボ系の代表的伝達関数と考えられる“積分+1次おくれ”系に対し、外乱を考慮しない有限整定時間応答補償を行なった系について検討した。その結果、この系においては飽和の程度如何にかかわらず決して乱調現象を発生しないことが判明した。ただしこの系においては、補償装置設計の際、外乱に対する考慮がなされていないから、さきに述べたように一旦飽和を生ずれば有限整定の性質は失われる。

ついで第6章においてはサンプル値系における非線形振動中、サンプリング周期の整数倍を周期とするもののみについて考察を行い、整数次振動の平衡状態の成立条件、求められた平衡点の安定問題を解明する方法を述べた。この方法の特徴を要約すれば以下の如くなる。

1. 本方法は整数次振動の1周期間に含まれる有限個のパルスの各々について、それらが非線形特性を通過することによる影響を等価伝達関数法における等価ゲインと類似な考え方で処理したものであるが、平衡条件究明の過程には何等近似が含まれず、正確な結果を得ることができる。
2. 本方法適用の場合の制限条件は、生起する振動がサンプリング周期の整数倍でありさえすれば如何なるものでもよく、等価伝達関数法の場合における如く、生起する現象を単一正弦波状振動と仮定する必要はない。
3. 対象とする系の有する非線形特性はそれが入力の一価関数である

かぎり、何であってもそのまま適用可能である。

4. サンプリング周期の整数倍を周期としてゲイン定数が変化するサンプル値可変ゲイン系の解析にそのまま適用できる。

5. 本方法は系に含まれる制御対象の次数の高さは何等解析を困難にしない。しかし、仮定する整数次振動の周期が長くなると平衡状態成立条件の吟味はデジタル計算機を用うるのでなければ非常に面倒になる。ここに述べた制御対象の次数の高さは何等解析を困難にしないという特長は、最近生物電子工学方面でとりあげられつつあるところの、多数の神経細胞からなる系における振動現象の取りあつかい等に対し有力な発展が予測される。

6. サンプル値系においては、非線形特性および制御対象が特殊な場合、例えば非線形特性がリレーで制御対象が積分性である場合等を除いて、一般に生ずる非線形振動の周期がサンプリング周期の整数倍でなければならない事情は存在しない。したがって、本方法は対象とする系にある特定の振動（整数次振動）が存在するか否かの判定に対しては有力であるが、その系が安定であるか否かの判定に対してはあまり役に立たない。このような問題に関しては後述のサンプル値系に対する等価伝達関数法を併用して吟味する必要がある。

第7章においてはサンプル値系における等価伝達関数法を、サンプル値系における非線形特性として最も重要な飽和要素に対して導く方法について述べた。等価伝達関数法をサンプル値系に適用するに当っては飽和やリレーといった非線形要素による波形の変歪その他、サンプリング機構のサンプリング動作によって生ずる高調波成分を如何に処理するかが問題になる。ここにおいては生起する非線形振動の周期がサンプリング周期に比べ十分長い場合と、両者が近い場合とでサンプリング機構のあつかい方を変え、3通りの方法について考察した。

最初の2つの方法は、非線形振動の周期がサンプリング周期に比べ十分長い場合を対象としたもので、それぞれ系に生起する振動を単一周波数の正弦波状振動で近似できる場合を想定し、1つは制御装置出力くバ

ルス信号)回路に飽和特性が存在するものと仮定し、飽和要素入力パルス列の正弦波状包絡線に対し、いま1つは制御装置出力に零次ホールド回路を介して飽和特性が存在するものと仮定し、零次ホールド回路の階段状出力の基本波成分に対し連続系の場合と同じ意味の等価伝達関数を定義したものである。したがって、これらの解析法においては非線形振動の周波数とサンプリング周波数との間に何等の制約、すなわち整数次振動と非整数次振動の別、サンプリング時点と振動の位相関係等考慮する必要がなく、適用は非常に簡単で实际的ではあるが、サンプリング動作により発生する高調波の影響を全く無視した近似法であるため、非線形振動の周波数とサンプリング周波数が接近した場合、その結果に対する信頼性は急速に劣化する。

これらの方法に対し、第3の方法として考えたものは非線形振動の周期がサンプリング周期に近い場合を対象とし、両者の関係が整数倍の場合を想定、サンプリング動作により発生する高調波の影響および非線形振動のサンプリング時点に対する位相関係を考慮したものである。この方法において、非線形振動の周期をサンプリング周期の整数倍と想定したのは解析を容易にするためであり、本想定は一般にはこの第3の方法の利用範囲を非常に制約するものになる。非線形振動の周波数がサンプリング周波数に近い場合における非整数次振動の問題はサンプル値系の非線形振動における残された大きな課題の一つである。

本論文第Ⅲ編においては、サンプル値制御理論の実際面への応用を目的にして開発したサンプル値系用制御装置の代表的試作例2つについて述べている。

第8章、9章はサンプル値制御理論において注目されている有限整定時間応答をはじめ、連続制御において採用されているものと類似な制御動作、すなわち比例、積分、微分およびそれらの複合された制御動作を実現するのに必要な任意パルス伝達関数発生装置を如何にして簡単に実現するかの点に重点をおき、使用要素の開発、機構に対する考察を行な

ったものである。

第10章においては、サンプル値制御を^{10.1}実施することにより得られる1つの大きな特長とも言うべきサンプル値多重制御を実施するための多重サンプル値制御装置について述べた。なお、本多重制御装置は通信ケーブル芯線被覆機のキャパシタンス制御用実用機開発を目的としたものであり、原理並びに機構に関する考察と同時に実際の系に混入する外乱の性質(パワースペクトル)に対し、如何にループゲインおよびサンプリング周期等の決定を行うべきかのサンプル値系における統計理論を基礎とした理論的並びに実験的考察を同時に行なった。

以上3つの編に亘りサンプル値系の線形理論、非線形理論および理論の実際応用に関して行なった研究の内容を説明したわけであるが、これらは主として、連続フィードバック制御系に対応する(いま一つのフィードバック制御方式としての)サンプル系に関する研究であった。これに対し、最近においてはサンプル値系の理論は、必ずしも制御系にだけに限定せず、広く一般にパルス信号を根幹とした系の研究、例えば脳や神経などにおける知覚、認識、学習等の生物学的な動作機構の研究やそれらのサイバネチックなモデルの設計解析等の方面へ大きく発展せしむべき段階にあるものと考えらる。

謝 辞

本研究は京都大学工学部教授近藤文治先生御指導のもとに行なったものであり、京都大学工学部電気工学教室在学中より終始御懇切なる御指導と御鞭撻をいただいた同先生に厚く感謝の意を表するものである。

また、この方面の研究に対する開眼の機会を与えていただいた京都大学工学部林重憲先生に厚く御礼申し上げる。

さらに、折にふれ御助言、御教示、御討論をいただいた京都大学工学部電気、電子および第二電気各教室の諸先生方、近藤研究室職員、学生、同研究室卒業生の諸氏、並びに装置試作実験に関し色々と御協力をいただいた住友電気工業株式会社研究部熊丸博之氏はじめ同社研究部の方々に、ここに合せて深く感謝する次第である。

附 録

附 録 1 (本文 42 頁 3.2.2)

例えば、式(3.33)第1式において、 $\eta_1 = 0$ の場合について考える。

$$\begin{aligned}
 (z-1)^w & \left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |\Theta_3| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z - e^{-\alpha_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} \right. \\
 & \left. \times |A_3| |\Theta_4| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right] \Bigg|_{z \rightarrow 1} = 0 \quad (A-1-1)
 \end{aligned}$$

式(3.24)および(3.31)を上式に代入することにより、

$$\begin{aligned}
 (z-1)^w & \left[\frac{K m T}{(r+w)!} \left\{ \binom{r+w}{r+1} P(0)^{(w-1)} \binom{r+1}{r} \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} \right. \right. \\
 & + \binom{r+w}{r+2} P(0)^{(w-2)} \binom{r+2}{r+1} \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+1)} \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \left. + \binom{r+w}{r+w} P(0)^{(0)} \binom{r+w}{r+w-1} \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+w-1)} \right\} (z-1)^r \prod_{j=1}^u (z - e^{-\alpha_j T}) \\
 & + \frac{m T}{w!} \left\{ \binom{w}{1} Q(0)^{(w-1)} \binom{1}{0} \frac{1}{z-1} \right. \\
 & + \binom{w}{2} Q(0)^{(w-2)} \binom{2}{1} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{(1)} \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \left. + \binom{w}{w} Q(0)^{(0)} \binom{w}{w-1} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{(w-1)} \right\} z^{r+w-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \Bigg|_{z \rightarrow 1} \\
 & = \frac{K m T}{(r+w)!} \left\{ \binom{r+w}{r+w} P(0)^{(0)} \binom{r+w}{r+w-1} \left(\frac{1}{z - e^{sT}} \right)^{(r+w-1)} (z-1)^{r+w} \prod_{j=1}^u (z - e^{-\alpha_j T}) \right\} \Bigg|_{z \rightarrow 1}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{n! T}{w!} \left\{ \binom{w}{w} Q(0)^{(0)} \binom{w}{w-1} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{(w-1)} (z-1)^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} \beta_q z^q \right\}_{z \rightarrow 1} \quad (\text{A-1-2})^*$$

ところが一方、

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{sT}}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} &= \binom{x}{0} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} e^{sT} + \binom{x}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-1)} T e^{sT} + \binom{x}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-2)} T^2 e^{sT} \\ &+ \dots + \binom{x}{x} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} T^x e^{sT} \quad (\text{A.1.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故に} \quad \left(\frac{e^{sT}-1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} &= \binom{x}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-1)} T e^{sT} + \binom{x}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-2)} T^2 e^{sT} + \dots \\ &+ \binom{x}{x} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} T^x e^{sT} \quad (\text{A.1.4}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{sT}-1}{z-e^{sT}} \right) &= \frac{T e^{sT} (z-e^{sT}) + T e^{sT} (e^{sT}-1)}{(z-e^{sT})^2} \\ &= \frac{T e^{sT}}{(z-e^{sT})^2} [z-e^{sT}+e^{sT}-1] = (z-1) \frac{T e^{sT}}{(z-e^{sT})^2} = (z-1) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right) \quad (\text{A.1.5}) \end{aligned}$$

$$\text{故に} \quad \left(\frac{e^{sT}-1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} = (z-1) \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\begin{aligned} \text{故に} \quad (z-1) \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} &= \binom{x}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-1)} T e^{sT} + \binom{x}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-2)} T^2 e^{sT} + \dots \\ &\dots + \binom{x}{x} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} T^x e^{sT} \quad (\text{A.1.7}) \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} (z-1) \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x)} \Big|_{s \rightarrow 0} &= \binom{x}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-1)} T \Big|_{s \rightarrow 0} + \binom{x}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(x-2)} T^2 \Big|_{s \rightarrow 0} + \dots \\ &\dots + \binom{x}{x} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} T^x \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (\text{A.1.8}) \end{aligned}$$

* $\binom{v}{j} \equiv i C_j$

なる関係が存在する。式(A.1.8)の関係を用うることにより、

$$\begin{aligned} (z-1)^{r+w} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+w-1)} &= (z-1)^{r+w-1} \left\{ \binom{r+w-1}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+w-2)} T \right. \\ &\quad \left. + \binom{r+w-1}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+w-3)} T^2 + \dots + \binom{r+w-1}{r+w-1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} T^{r+w-1} \right\} \Big|_{z \rightarrow 1} \\ &= (z-1)^{r+w-1} \binom{r+w-1}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+w-2)} T \quad (A.1.9) \end{aligned}$$

以下同様にして、

$$\begin{aligned} (z-1)^{r+w} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+w-1)} \Big|_{s \rightarrow 0} &= (z-1)^{r+1} \binom{r+w-1}{1} T \binom{r+w-2}{1} T \dots \binom{r+1}{1} T \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} \Big|_{s \rightarrow 0} \\ &\quad (A.1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z-1)^w \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(w-1)} \Big|_{s \rightarrow 0} &= (z-1) \binom{w-1}{1} T \binom{w-2}{1} T \dots \binom{1}{1} T \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (A.1.11) \end{aligned}$$

式(A.1.2)はつぎのように表わされる、

$$\begin{aligned} (z-1)^w &\left[\frac{K}{(r+w)!} |A_2| |\theta_{31}| |B_2| (z-1)^r \prod_{j=1}^w (z-e^{-a_j T}) + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} \right. \\ &\quad \left. \times |A_3| |\theta_{41}| |B_3| \sum_{q=0}^{w+v-1} \partial_{\bar{q}} z^{\bar{q}} \right] \Big|_{z \rightarrow 1} \\ &= \frac{K m_1 T}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+w} P(0)^{(0)} \binom{r+w}{r+w-1} (z-1)^{r+1} \binom{r+w-1}{1} T \binom{r+w-2}{1} T \dots \\ &\quad \dots \binom{r+1}{1} T \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r)} \prod_{j=1}^w (z-e^{-a_j T}) \\ &\quad + \frac{m T}{w!} (w) Q(0)^{(0)} \binom{w}{w-1} (z-1) \binom{w-1}{1} T \binom{w-2}{1} T \dots \\ &\quad \dots \binom{1}{1} T \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} \Big|_{s \rightarrow 0} z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} \partial_{\bar{q}} z^{\bar{q}} \Big|_{z \rightarrow 1} \end{aligned}$$

— 304 —

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K m T \omega!}{(r+\omega)!} \binom{r+\omega}{r} P(0)^{(0)} \binom{r+\omega}{r} T^{\omega-1} (z-1)^{r+1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} \prod_{j=1}^{\omega} (z-e^{-a_j T}) \\
 &+ \frac{m T \omega!}{\omega!} \binom{\omega}{\omega} Q(0)^{(0)} \binom{\omega}{0} (z-1)^{\omega-1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} z^{r+u-\omega-\nu+1} \sum_{q=0}^{\omega+\nu-1} \beta_q z^q \Big|_{z=1} \\
 &\quad (A.1.12)
 \end{aligned}$$

一方、式(3.34)で $\eta = \omega$ の場合には、

$$\begin{aligned}
 &\frac{K}{(r+\omega)!} |A_2| |\Theta_{3\omega}| |B_2| (z-1)^{r+1} \prod_{j=1}^{\omega} (z-e^{-a_j T}) \\
 &+ \frac{1}{\omega!} |A_3| |\Theta_{4\omega}| |B_3| (z-1)^{r+u-\omega-\nu+1} \sum_{q=0}^{\omega+\nu-1} \beta_q z^q \\
 &= \frac{K (mT)^\omega}{(r+\omega)!} \binom{r+\omega}{r} P(0)^{(0)} \binom{r+\omega}{r} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} (z-1)^{r+1} \prod_{j=1}^{\omega} (z-e^{-a_j T}) \\
 &+ \frac{1}{\omega!} \binom{\omega}{\omega} Q(0)^{(0)} (mT)^\omega \binom{\omega}{0} \frac{(z-1)^2}{z-1} z^{r+u-\omega-\nu+1} \sum_{q=0}^{\omega+\nu-1} \beta_q z^q \\
 &\quad (A.1.13)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\text{式}(A.1.12) = \frac{\omega!}{(mT)^{\omega-1}} \text{式}(1.2.34) \Big|_{\eta=\omega} \quad (A.1.14)$$

となる。したがって、式(3.33)第1式において、 $\eta_1 = 0$ の場合は式(3.34)で、 $\eta = \omega$ とおいた場合が満足されるときには自動的に満足されることになる。

附 録 2 (本文 43 頁 3.2.2)

式(3.32)の被微分関数中 $|A_2|$, $|A_3|$ および $|B_2|$, $|B_3|$ のそれぞれ第 i 行および第 i 列より成る成分に注目し、これを $E_i(z)$ と表わせば、式(3.32)はつぎのように記することができる。

$$\frac{d^{\eta_0}}{ds^{\eta_0}} \left\{ \sum_{i=0}^w E_i(z) \right\} \Big|_{z \rightarrow 1} = 0 \quad (\text{A.2 1})$$

$$\begin{aligned} E_i(z) = & \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i)} (z-1)^{w+r+1} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \\ & + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i)} z^{r+u-w-v+1} (z-1)^{w+r} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \end{aligned} \quad (\text{A.2 2})$$

上式に附録1式(A.1.8)の關係を用うることにより、

$$\begin{aligned} E_i(z) \Big|_{z \rightarrow 1} = & \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) (z-1)^{w+r} \\ & \times \left\{ \binom{r+i}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-1)} + \binom{r+i}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-2)} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \binom{r+i}{i} T^i \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} + \dots + \binom{r+i}{r+i} T^{r+i} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} \right\} \Big|_{z \rightarrow 1} \\ & + \frac{z^{r+u-w-v+1}}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q (z-1)^w \left\{ \binom{i}{1} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-1)} \right. \\ & \left. + \binom{i}{2} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-2)} + \dots + \binom{i}{i} \left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} T^i \right\} \Big|_{z \rightarrow 1} \quad (\text{A.2 3}) \end{aligned}$$

$\eta_0 = w-1$ の場合につき考えると、

$$\begin{aligned} \frac{d^{w-1}}{dz^{w-1}} E_i(z) \Big|_{z \rightarrow 1} &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \left\{ \binom{r+i}{1} T \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-1)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right] \right. \\ &\quad + \binom{r+i}{2} T^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-2)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right] \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. + \binom{r+i}{i} T^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right] \right\} \Big|_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \binom{r+i}{i+1} T^{i+1} \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r-1)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\ & \vdots \\ & + \binom{r+i}{r+i} T^{i+r} \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \left\{ \binom{i}{i} T \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-1)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \right. \\ & + \binom{i}{2} T^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-2)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\ & \left. + \binom{i}{i} T^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \right\} \end{aligned}$$

(A.2.4)

ただし、上式において $\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(l)}$ は s について l 回微分した結果に対し $s=0$ とおくことを意味し、 $\left[\quad \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)}$ は $\left[\quad \right]$ 内を z に関して $(w-1)$ 回微分した結果に対し $z=1$ とおくことを意味する。上式中、 $\left[\quad \right]$ 内、すなわち $\binom{r+i}{i+1} \sim \binom{r+i}{r+i}$ のかゝった項はゼロである。したがって式 (A.2.4) はつぎのように書き改められる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^{w-1}}{dz^{w-1}} E_i(z) \Big|_{z \rightarrow 1} \\ & = \frac{\kappa}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \left\{ \binom{r+i}{i} T \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-1)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \right. \\ & + \binom{r+i}{2} T^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-2)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\ & \vdots \\ & + \binom{r+i}{i} T^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\ & \left. + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \left\{ \binom{i}{i} T \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-1)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \binom{i}{2} T^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-2)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} g_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\
 & \vdots \\
 & + \binom{i}{i} T^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} (z-1)^w z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} g_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \Bigg\} \\
 & \hspace{15em} (A.2.5)
 \end{aligned}$$

一方、式(3.34)の w 個の条件式において $P(0)^{(w-i)}$ および、 $Q(0)^{(w-i)}$ を含む各項のみをとり出して考える。 $i=1 \sim w$ に応じて、これらの項を $dF_{i1}(z)$ と記すものとすれば、

$$\begin{aligned}
 dF_{i1}(z) \Big|_{z=1} &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r+i-1} (mT) \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-1)} (z-1)^{w+r} \right. \\
 & \times \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{i-1} (mT) \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-1)} (z-1)^w \right. \\
 & \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} g_q z^q \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} \\
 dF_{i2}(z) \Big|_{z=1} &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r+i-2} (mT)^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r+i-2)} (z-1)^{w+r-1} \right. \\
 & \times \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)} + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{i-2} (mT)^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(i-2)} (z-1)^{w-1} \right. \\
 & \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} g_q z^q \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-2)} \\
 & \vdots \\
 dF_{ii}(z) \Big|_{z=1} &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(r)} (z-1)^{w+r-i+1} \right. \\
 & \times \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-i)} + \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{0} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)_{s \rightarrow 0}^{(0)} (z-1)^{w-i+1} \right. \\
 & \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} g_q z^q \Big]_{z \rightarrow 1}^{(w-i)} \hspace{5em} (A.2.6)
 \end{aligned}$$

式(A.2.6)はつぎのようにかきかえうる。

$$\begin{aligned}
 & dF_{i1}(z) \Big|_{z=1} \\
 &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r+i-1} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+i-1)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-i)} \\
 &+ \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{i-1} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(i-1)} (z-1)^w \right. \\
 &\quad \left. \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & dF_{i2}(z) \Big|_{z=1} \\
 &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r+i-2} (mT)^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r+i-2)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-2)} \\
 &+ \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{i-2} (mT)^2 \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(i-2)} (z-1)^w \right. \\
 &\quad \left. \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & dF_{ii}(z) \Big|_{z=1} \\
 &= \frac{K}{(r+w)!} \binom{r+w}{r+i} P(0)^{(w-i)} \binom{r+i}{r} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(r)} (z-1)^{w+r} \prod_{j=1}^u (z-e^{-a_j T}) \right]_{z \rightarrow 1}^{(w-i)} \\
 &+ \frac{1}{w!} \binom{w}{i} Q(0)^{(w-i)} \binom{i}{0} (mT)^i \left[\left(\frac{1}{z-e^{sT}} \right)^{(0)} (z-1)^w \right. \\
 &\quad \left. \times z^{r+u-w-v+1} \sum_{q=0}^{w+v-1} z_q z^q \right]_{z \rightarrow 0}^{(w-i)}
 \end{aligned}$$

以上 (A, 27)

すなわち

$$\frac{d^{w-1}}{dz^{w-1}} E_i(z) \Big|_{z \rightarrow 1}$$

$$= dF_{i1}(z) \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_1} + dF_{i2}(z) \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_2} + \dots + dF_{ii}(z) \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_i}$$

(A.2.8)

$i=1 \sim w$ について式 (A.2.8) の関係が成立するから、

$$\begin{aligned} & \frac{d^{w-1}}{dz^{w-1}} \left\{ \sum_{i=1}^w E_i(z) \right\} \Big|_{z \rightarrow 1} \\ &= \left[dF_{11}(z) + dF_{21}(z) + \dots + dF_{w1}(z) \right] \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_1} \\ & \quad + \left[dF_{12}(z) + dF_{22}(z) + \dots + dF_{w2}(z) \right] \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_2} \\ & \quad \vdots \\ & \quad + \left[dF_{1w}(z) + dF_{2w}(z) + \dots + dF_{ww}(z) \right] \Big|_{z \rightarrow 1} \frac{1}{m_w} \end{aligned}$$

(A.2.9)

式 (A.2.9) の右辺の各項は条件式 (3.34) の各左辺に各々等しい。したがって、式 (3.34) が成立するときには式 (3.32) も自動的に成立する。

附 録 3 (本文 67 頁 4.2.2)

$$G_1(s) = \frac{e^{-sT_L}}{s+b} = \frac{e^{-nsT} e^{-sT_{Lo}}}{s+b} \quad \left(\begin{array}{l} n=0, 1, 2, \dots \\ 0 \leq T_{Lo} < T \end{array} \right) \quad (\text{A.3.1})$$

の拡張 z 変換はつぎのような手法で与えられる。サンプリング周期を T とすれば $G(s)$ の拡張 z 変換 $G^*(z, m)$ は、

$$G_1^*(z, m) = z^{-n} Z_m \left[\frac{e^{-sT_{Lo}}}{s+b} \right] \quad 0 \leq T_{Lo} < T \quad (\text{A.3.2})$$

いま、新たに仮想的なむだ時間 T_m を考え、 $G_1(s) e^{-sT_m} = \frac{e^{-sT_{Lo}} e^{-sT_m}}{s+b}$

の単位衝撃関数に対する応答を $g_1(t)$ とすると、

$$g_i(t) = e^{-b(t-T_{L0}-T_m)} u(t-T_{L0}-T_m) \quad (A.3.3)$$

$T_{L0} \leq T_{L0} + T_m < T$ なる場合には $g_i(t)$ を時刻 T 毎にサンプリングして得られるパルス列 $g_i^*(t)$ は

$$g_i^*(t) = e^{b(T_{L0}+T_m)} e^{-bT} \delta(t-T) + e^{b(T_{L0}+T_m)} e^{-2bT} \delta(t-2T) + \dots \quad (A.3.4)$$

$$\text{故に } \mathcal{L}[g_i^*(t)] = e^{b(T_{L0}+T_m)} [e^{-bT} e^{-sT} + e^{-2bT} e^{-2sT} + \dots] \quad (A.3.5)$$

$$G_i^*(z, m) = \frac{e^{b(T_{L0}-mT)} z^{-1}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \quad (A.3.6)$$

$T \leq T_{L0} + T_m$ なる場合には、

$$g_i^*(t) = e^{b(T_{L0}+T_m)} e^{-2bT} \delta(t-2T) + e^{b(T_{L0}+T_m)} e^{-3bT} \delta(t-3T) + \dots \quad (A.3.7)$$

$$\text{故に } \mathcal{L}[g_i^*(t)] = e^{b(T_{L0}+T_m)} [e^{-2bT} e^{-2sT} + e^{-3bT} e^{-3sT} + \dots] \quad (A.3.8)$$

$$G_i^*(z, m) = \frac{e^{b(T_{L0}-mT)} e^{-bT} z^{-2}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \quad (A.3.9)$$

すなわち

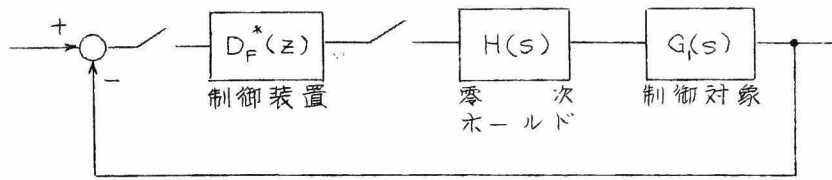
$$G_i^*(z, m) = \begin{cases} \frac{e^{b(T_{L0}-mT)} z^{-(n+1)}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} & 1 \geq m > T_{L0}/T \text{ のとき} \\ \frac{e^{b(T_{L0}-mT)} e^{-bT} z^{-(n+2)}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} & T_{L0}/T \geq m > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A.3.10)$$

附 録 4 (本文 67 頁 4.2.2)

図 A.4.2 において、

$$G_i(s) = \frac{K e^{-sT}}{T_0 s + 1}, \quad H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (A.4.1)$$

なる場合に対し、目標値入力 $R(s) = R/s$ に対する有限整定時間応答用制御装置 $D_F^*(z)$ を Jury および Schroeder の与えた方法により設



A - 4 - 1

計してみる。

(いま

$$G(s) \equiv H(s) G_1(s) \quad (A.4.2)$$

とかけば、

$$\begin{aligned} Z_m [H(s) G_1(s)] &= (1 - z^{-1}) Z_m \left[\frac{K/T_0}{s(s + 1/T_0)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \left\{ \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-1} e^{-mT/T_0}}{1 - e^{-T/T_0} z^{-1}} \right\} K \end{aligned} \quad (A.4.3)$$

式(A.4.3)の $z=1$ 以外の極、すなわち $z=e^{-T/T_0}$ を零点に持つよう開ループに換算した制御装置の z 変換 $D^*(z)$ をきめれば、

$$D^*(z) = d (1 - e^{-T/T_0} z^{-1}) \quad d: \text{未定定数} \quad (A.4.4)$$

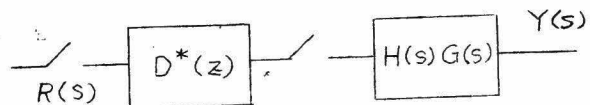
図A.4.2の系の出力の拡張 z 変換を $Y^*(z, m)$ とすれば、

$$\begin{aligned} Y^*(z, m) &= (1 - z^{-1}) \left\{ \frac{K z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{K e^{-mT/T_0} z^{-1}}{1 - e^{-T/T_0} z^{-1}} \right\} d (1 - e^{-T/T_0} z^{-1}) \cdot \frac{R}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{d (1 - e^{-T/T_0} z^{-1}) K R}{1 - z^{-1}} - K d z^{-1} e^{-mT/T_0} R \end{aligned} \quad (A.4.5)$$

最終値定理を用いて

$Y^*(z, m)$ の最終整定値が R になるよう未定定数 d を決定する。

すなわち、



A.4.2.

$$\frac{Kd(1-z^{-1}e^{-T/T_0})R}{1-z^{-1}} \cdot (1-z^{-1}) \Big|_{z \rightarrow 1} - KdRe^{-mT/T_0}z^{-1}(1-z^{-1}) \Big|_{z \rightarrow 1} = R \quad (\text{A.4.6})$$

$$\therefore d = \frac{1}{K(1-e^{-T/T_0})} \quad (\text{A.4.7})$$

したがって

$$D^*(z) = \frac{1}{K(1-e^{-T/T_0})} (1-e^{-T/T_0}z^{-1}) \quad (\text{A.4.8})$$

一方、実際に用うる制御装置 $D_F^*(z)$ は

$$D_F^*(z) = \frac{D^*(z)}{1-Z[H(s)G(s)]D^*(z)}$$

で与えられる。この式における $Z[H(s)G(s)]$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} Z[H(s)G(s)] &= (1-z^{-1}) \left\{ \frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{Kz^{-1}e^{-(T-T_L)/T_0}}{1-z^{-1}e^{-T/T_0}} \right\} \\ &= \frac{e^{-T/T_0}(e^{T_L/T_0}-1)z^{-1} + (1-e^{-T/T_0})e^{T_L/T_0}z^{-2}}{1-z^{-1}e^{-T/T_0}} K \quad (\text{A.4.9}) \end{aligned}$$

したがって、

$$D_F^*(z) = \frac{1}{K(1-e^{-T/T_0})} \frac{z^{-1} - z^{-2}e^{-T/T_0}}{1 - \frac{1-e^{-T/T_0}}{1-e^{-T/T_0}}z^{-1} - \frac{(e^{T_L/T_0}-1)e^{-T/T_0}}{1-e^{-T/T_0}}z^{-2}} \quad (\text{A.4.10})$$

附 録 5 (本文 68 頁 4.2.2)

制御装置出力の z 変換 $F^*(z)$ は図 4.3 より

$$F^*(z) = \frac{D_F^*(z)}{1+Z[H(s)G(s)]D_F^*(z)} - \frac{Z[H(s)G(s)]D_F^*(z)}{1+Z[H(s)G(s)]D_F^*(z)} \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \quad (\text{A.5.1})$$

式 (4.17), (A.4.9) および、式 (A.4.10) より、

$$F^*(z) = \frac{d(1+a_1 z^{-1})}{1-z^{-1}} + z^{-1}(b_1+b_2 z^{-1}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \quad (A.5.2)$$

また偏差出力 $E^*(z, m)_> (0 \leq m < \tau_c/\tau_s)$, $E^*(z, m)_< (\frac{\tau_c}{\tau_s} \leq m < 1)$ は

$$\begin{aligned} E^*(z, m)_< &= R^*(z, m) - \frac{Z_m[H(s)G(s)]_< D_F^*(z)}{1+Z[H(s)G(s)]_< D_F^*(z)} R^*(z) - \frac{Z_m[H(s)G(s)]_<}{1+Z[H(s)G(s)]_< D_F^*(z)} \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \\ E^*(z, m)_> &= R^*(z, m) - \frac{Z_m[H(s)G(s)]_> D_F^*(z)}{1+Z[H(s)G(s)]_> D_F^*(z)} R^*(z) - \frac{Z_m[H(s)G(s)]_>}{1+Z[H(s)G(s)]_> D_F^*(z)} \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \end{aligned} \quad (A.5.3)$$

式 (4.15), (4.17) および (A.4.10) を代入することにより、

$$\begin{aligned} E^*(z, m)_< &= \frac{z^{-1}+b_{1m1} z^{-2}+b_{2m1} z^{-3}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-2}(b_{1m1}+b_{2m1} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \\ E^*(z, m)_> &= \frac{(1+b_{1m2}) z^{-1}+b_{2m2} z^{-2}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-1}(b_{1m2}+b_{2m2} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \end{aligned} \quad (A.5.4)$$

$$1+b_1+b_2=0, \quad 1+b_{1m1}+b_{2m1}=0, \quad 1+b_{1m2}+b_{2m2}=0 \quad (A.5.5)$$

の関係を代入することにより、

$$\begin{aligned} E^*(z, m)_< &= z^{-1}+(1+b_{1m1}) z^{-2} + \frac{z^{-2}(b_{1m1}+b_{2m1} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \\ E^*(z, m)_> &= (1+b_{1m2}) z^{-1} + \frac{z^{-1}(b_{1m2}+b_{2m2} z^{-1})}{d(1+a_1 z^{-1})} (1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}) \sum_{i=1,2,\dots} \zeta_i z^{-(i-1)} \end{aligned} \quad (A.5.6)$$

附 録 6 (本文 80 頁 4.2.5)

式 (4.34) (4.35) 第 3 項をそれぞれ $E_3^*(z, m)_<$, $E_3^*(z, m)_>$ と表わせば、

$$E_3^*(z, m)_< = \frac{z^{-(p+3)}(b_{1m1}+b_{2m1} z^{-1})(1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2})}{d(1+a_1 z^{-1})(1+b_2 z^{-2})} \left[(v-1) \frac{1-z^{-p}}{1-z^{-2}} - b_2 \zeta_p + b_2 \zeta_{p+q} z^{-q} \right] \quad (A.6.1)$$

$$E_3^*(z, m)_> = \frac{z^{-(P+2)}(b_{1m2} + b_{2m2}z^{-1})(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})}{d(1 + a_1z^{-1})(1 + b_2z^{-2})} \left[(v-1) \frac{1-z^{-q}}{1-z^{-2}} - b_2\zeta_p + b_2\zeta_{p+q}z^{-q} \right] \quad (A.6.2)$$

式 (A.6.1) より、

$$E_3(P+3, m)_< = (b_2\zeta_p + 1 - v)(1 - e^{-\tau_s} e^{\tau_c} e^{-m\tau_s}) \quad (A.6.3)$$

$$E_3(x, m)_< = \left\{ A(-b_2)^{\frac{x-P-1}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) + B(-a_1)^{x-P-4} [b_2\zeta_p - a_1^2(b_2\zeta_p + 1 - v)] \right. \\ \left. + (v-1)C \right\} e^{-m\tau_s} + 1 - v, \quad x = P+5, P+7, \dots, P+q+1 \quad (A.6.4)$$

$$E_3(x, m)_< = \left\{ D(-b_2)^{\frac{x-P-2}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) + B(-a_1)^{x-P-4} [b_2\zeta_p - a_1^2(b_2\zeta_p + 1 - v)] \right. \\ \left. - (v-1)C \right\} e^{-m\tau_s} + v - 1 - (-b_2)^{\frac{x-P-2}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1), \\ x = P+4, P+6, \dots, P+q+2 \quad (A.6.5)$$

$$E_3(P+q+3)_< = \left\{ A(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) + B(-a_1)^{q-1} [b_2\zeta_p - a_1^2(b_2\zeta_p + 1 - v)] \right. \\ \left. + e^{-\tau_s} e^{\tau_c} \left[\frac{1 - e^{-\tau_s}}{1 + e^{-\tau_s}} (v-1) + b_2\zeta_{p+q} \right] \right\} e^{-m\tau_s} - b_2\zeta_{p+q} \quad (A.6.6)$$

$$E_3(x, m)_< = \left\{ A(-b_2)^{\frac{x-P-q-1}{2}} \left[(-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) - (b_1\zeta_{p+q} + v - 1) \right] \right. \\ \left. + B(-a_1)^{x-P-q-4} \left[(-a_1)^q [b_2\zeta_p - a_1^2(b_2\zeta_p + 1 - v)] - [b_2\zeta_{p+q} \right. \right. \\ \left. \left. - a_1^2(b_2\zeta_{p+q} + 1 - v)] \right] \right\} e^{-m\tau_s} \\ x = P+q+5, P+q+7, \dots \quad (A.6.7)$$

$$E_3(x, m)_< = \left\{ D(-b_2)^{\frac{x-P-q-2}{2}} \left[(-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) - (b_1\zeta_{p+q} + v - 1) \right] \right. \\ \left. + B(-a_1)^{x-P-q-4} \left[(-a_1)^q [b_2\zeta_p - a_1^2(b_2\zeta_p + 1 - v)] - [b_2\zeta_{p+q} \right. \right. \\ \left. \left. - a_1^2(b_2\zeta_{p+q} + 1 - v)] \right] \right\} e^{-m\tau_s} - (-b_2)^{\frac{x-P-q-2}{2}} \left[\right. \\ \left. (-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1\zeta_p + v - 1) - (b_1\zeta_{p+q} + v - 1) \right]$$

$$x = p + q + 4, \quad p + q + 6, \dots \quad (\text{A. 6.8})$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - e^{-\tau_s})^2 e^{\tau_L}}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1}, \quad B = \frac{(1 - e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{\tau_L})e^{-\tau_s} e^{\tau_L}}{(1 + e^{-\tau_s})(e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1)}, \\ C &= \frac{2 e^{-\tau_s} e^{\tau_L}}{1 + e^{-\tau_s}}, \quad D = \frac{(2 - e^{-\tau_s} - e^{\tau_L})e^{-\tau_s} e^{\tau_L}}{e^{-\tau_s} - e^{-2\tau_s} - e^{\tau_L} + 1} \quad (\text{A. 6.9}) \end{aligned}$$

また式 (A. 6.2) より、

$$\varepsilon_3(p+2, m)_> = (b_2 \zeta_p + 1 - v)(1 - e^{\tau_L} e^{-m\tau_s}) \quad (\text{A. 6.10})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x, m)_> &= \left\{ A'(-b_2)^{\frac{x-p}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) + B'(-a_1)^{x-p-3} [b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v)] \right. \\ &\quad \left. + (v-1)C' \right\} e^{-m\tau_s} + 1 - v, \quad x = p+4, p+6, \dots, p+q \\ &\quad (\text{A. 6.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x, m)_> &= \left\{ D'(-b_2)^{\frac{x-p-1}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) + B'(-a_1)^{x-p-3} [b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v)] \right. \\ &\quad \left. - (v-1)C' \right\} e^{-m\tau_s} + v - 1 - (-b_2)^{\frac{x-p-1}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) \\ &\quad x = p+5, p+7, \dots, p+q+1 \quad (\text{A. 6.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(p+q+2, m)_> &= \left\{ A'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) + B'(-a_1)^{q-1} [b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v)] \right. \\ &\quad \left. + e^{\tau_L} \left[\frac{1 - e^{-\tau_s}}{1 + e^{-\tau_s}} (v - 1) + b_2 \zeta_{p+q} \right] \right\} e^{-m\tau_s} - b_2 \zeta_{p+q} \quad (\text{A. 6.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x, m)_> &= \left\{ A'(-b_2)^{\frac{x-p-q}{2}} [(-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) - (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1)] \right. \\ &\quad \left. + B'(-a_1)^{x-p-q-3} [(-a_1)^q [b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v)] \right. \\ &\quad \left. - [b_2 \zeta_{p+q} - a_1^2 (b_2 \zeta_{p+q} + 1 - v)]] \right\} e^{-m\tau_s} \\ &\quad x = p+q+4, \quad p+q+6, \dots \quad (\text{A. 6.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x, m)_> &= \left\{ D'(-b_2)^{\frac{x-p-q-1}{2}} [(-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) - (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1)] \right. \\ &\quad \left. + B'(-a_1)^{x-p-q-3} [(-a_1)^q [b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v)] \right. \\ &\quad \left. - [b_2 \zeta_{p+q} - a_1^2 (b_2 \zeta_{p+q} + 1 - v)]] \right\} e^{-m\tau_s} \end{aligned}$$

$$-(b_2) \frac{x-p-q-1}{2} \left[(-b_2)^{\frac{q}{2}} (b_1 \zeta_p + v - 1) - (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1) \right] \\ x = p+q+3, p+q+5, \dots \quad (A.6.15)$$

ただし

$$A' = A e^{\tau_s}, \quad B' = B e^{\tau_s}, \quad C' = C e^{\tau_s}, \quad D' = D e^{\tau_s} \quad (A.6.16)$$

式(4.40)第5式および(A.6.5)より、

$$\varepsilon(x, m)_< = e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G(-b_2) \frac{x-p-2}{2} + H(-a_1)^{x-p-4} + I \right\} \\ + J + K(-b_2) \frac{x-p-2}{2} \\ x = p+4, p+6, \dots, p+q+2 \quad (A.6.17)$$

$$\sum_{x=p+4, p+6}^{p+q+2} \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_< dm = \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_L}}{2} (1 - e^{-2\tau_L}) \left[G^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + H^2 \frac{1-a_1^{2q}}{1-a_1^4} \right. \\ \left. + I^2 \frac{q}{2} + 2GH \frac{-b_2[1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+a_1^2 b_2} + 2HI \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + 2GH \frac{-b_2(1-(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+b_2} \right] \\ + 2e^{-\tau_s} e^{\tau_L} (1 - e^{-\tau_L}) \left[GK \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + HK \frac{-b_2[1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+a_1^2 b_2} \right. \\ \left. + IK \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + GJ \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + HJ \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + IJ \frac{q}{2} \right] \\ \left. + \tau_L \left[K^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + 2KJ \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + J^2 \frac{q}{2} \right] \quad (A.6.18)$$

ただし、

$$G = D e^{\tau_s} e^{-\tau_L} (b_1 \zeta_p + v - 1)$$

$$H = v(-a_1)^{p+2} + (1-v)(-a_1)^2 + \frac{a_1}{d} (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) - \frac{b_2 \zeta_p}{d} \\ + B e^{\tau_s} e^{-\tau_L} (b_2 \zeta_p - a_1^2 (b_2 \zeta_p + 1 - v))$$

$$I = (1-v) C e^{\tau_s} e^{-\tau_L}$$

$$J = v - 1$$

$$K = -(b_1 \zeta_p + v - 1)$$

以上 (A.6.19)

式(4.40)第5式および(A.6.4)より、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, m)_< &= e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G'(-b_2)^{\frac{x-p-1}{2}} + H(-a_1)^{x-p-4} - I \right\} - J \\ x &= p+5, p+7, \dots, p+q+1 \end{aligned} \quad (\text{A.6.20})$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=p+5, p+7}^{p+q+1} \int_0^{\tau_L/\tau_s} \mathcal{E}(x, m) dm &= \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_L}}{2} (1 - e^{-2\tau_L}) \left[G'^2 \frac{b_2^2(b_2^2 - b_2^q)}{1 - b_2^2} + H^2 \frac{a_1^2 - a_1^{2(q-1)}}{1 - a_1^4} \right. \\ &\quad + I^2 \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + 2G'H \frac{-b_2^2 a_1 - (-a_1)^{q-1} (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + a_1^2 b_2} - 2HI \frac{-a_1 - (-a_1)^{q-1}}{1 - a_1^2} - 2G'I \frac{b_2^2 - (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + b_2} \Big] \\ &\quad - 2J e^{-\tau_s} e^{\tau_L} (1 - e^{-\tau_L}) \left[G' \frac{b_2^2 - (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + b_2} + H \frac{-a_1 - (-a_1)^{q-1}}{1 - a_1^2} - I \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \tau_L J^2 \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6.21})$$

ただし、

$$G' = A e^{\tau_s} e^{-\tau_L} (b_1 \zeta_p + v - 1)$$

式(4.40)第9式および(A.6.11)より、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, m)_> &= e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G'(-b_2)^{\frac{x-p}{2}} + H(-a_1)^{x-p-3} - I \right\} - J \\ x &= p+4, p+6, \dots, p+q \end{aligned} \quad (\text{A.6.22})$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=p+4, p+6}^{p+q} \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \mathcal{E}(x, m)_> dm &= \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_s}) \left[G'^2 \frac{b_2^2(b_2^2 - b_2^q)}{1 - b_2^2} + H^2 \frac{a_1^2 - a_1^{2(q-1)}}{1 - a_1^4} \right. \\ &\quad + I^2 \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + 2G'H \frac{-b_2^2 a_1 - (-a_1)^{q-1} (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + a_1^2 b_2} - 2HI \frac{-a_1 - (-a_1)^{q-1}}{1 - a_1^2} \\ &\quad \left. - 2G'I \frac{b_2^2 - (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + b_2} \right] \\ &\quad - 2J e^{\tau_L} (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) \left[G' \frac{b_2^2 - (-b_2)^{\frac{q+2}{2}}}{1 + b_2} + H \frac{-a_1 - (-a_1)^{q-1}}{1 - a_1^2} - I \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \right] \\ &\quad + (\tau_s - \tau_L) J^2 \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6.23})$$

式(4.40)第9式および(A.6.12)より、

$$\mathcal{E}(x, m)_s = e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G(-b_2)^{\frac{x-p-1}{2}} + H(-a_1)^{x-p-3} + I \right\} + J + K(-b_2)^{\frac{x-p-1}{2}}$$

$$x = p+5, p+7, \dots, p+q+1 \quad (A.6.24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=p+3, p+5}^{p+q+1} \int_{\tau_L/\tau_S}^1 \mathcal{E}^2(x, m)_> dm &= \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_S}) \left[G^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + H^2 \frac{1-a_1^{2q}}{1-a_1^4} + I^2 \frac{q}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2GH \frac{-b_2[1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+a_1^2 b_2} + 2HI \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + 2GI \frac{-b_2(1-(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+b_2} \right] \\ &\quad + 2e^{\tau_L}(e^{-\tau_L} - e^{-\tau_S}) \left[GK \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + HK \frac{-b_2[1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+a_1^2 b_2} \right. \\ &\quad \left. + IK \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + GJ \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + HJ \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + IJ \frac{q}{2} \right] \\ &\quad + (\tau_S - \tau_L) \left[K^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + 2KJ \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + J^2 \frac{q}{2} \right] \quad (A.6.25) \end{aligned}$$

式 (A.6.18) および (A.6.25) より,

$$\begin{aligned} \sum_{x=p+3, p+5}^{p+q+1} \int_{\tau_L/\tau_S}^1 \mathcal{E}^2(x, m)_> dm + \sum_{x=p+4, p+6}^{p+q+2} \int_0^{\tau_L/\tau_S} \mathcal{E}^2(x, m)_< dm \\ &= \frac{1-e^{-2\tau_S}}{2} \left[G^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + H^2 \frac{1-a_1^{2q}}{1-a_1^4} + I^2 \frac{q}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2GH \frac{-b_2(1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+a_1^2 b_2} + 2HI \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + 2GI \frac{-b_2(1-(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+b_2} \right] \\ &\quad + 2(1-e^{-\tau_S}) \left[GK \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + HK \frac{-b_2[1-a_1^q(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+a_1^2 b_2} + IK \frac{-b_2(1-(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+b_2} \right. \\ &\quad \left. + GJ \frac{-b_2(1-(-b_2)^{\frac{q}{2}})}{1+b_2} + HJ \frac{1-a_1^q}{1-a_1^2} + IJ \frac{q}{2} \right] \\ &\quad + \tau_S \left[K^2 \frac{b_2^2(1-b_2^q)}{1-b_2^2} + 2KJ \frac{-b_2[1-(-b_2)^{\frac{q}{2}}]}{1+b_2} + J^2 \frac{q}{2} \right] \quad (A.6.26) \end{aligned}$$

式 (A.6.21) および (A.6.23) より,

$$\begin{aligned} \sum_{x=p+4, p+6}^{p+q} \int_{\tau_L/\tau_S}^1 \mathcal{E}^2(x, m)_> dm + \sum_{x=p+5, p+7}^{p+q+1} \int_0^{\tau_L/\tau_S} \mathcal{E}^2(x, m)_< dm \\ &= \frac{1-e^{-2\tau_S}}{2} \left[G^2 \frac{b_2^2(b_2^2-b_2^q)}{1-b_2^2} + H^2 \frac{a_1^2-a_1^{2(q-1)}}{1-a_1^4} + I^2 \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2G'H \frac{-b_2^2 a_1 (-a_1)^{\frac{\tau}{2}-1} (-b_2)^{\frac{\tau+2}{2}}}{1+a_1^2 b_2} - 2HI \frac{-a_1 (-a_1)^{\frac{\tau}{2}-1}}{1-a_1^2} - 2G'I \frac{b_2^2 (-b_2)^{\frac{\tau+2}{2}}}{1+b_2} \\
& - 2J(1-e^{-\tau_s}) \left[G' \frac{b_2^2 (-b_2)^{\frac{\tau+2}{2}}}{1+b_2} + H \frac{-a_1 (-a_1)^{\frac{\tau}{2}-1}}{1-a_1^2} - I \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) \right] \\
& + \tau_s J^2 \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) \quad (A.6.27)
\end{aligned}$$

式(4.40) 第5式および (A.6.7) より、

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x, m)_\zeta &= e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_\zeta} \left\{ \left[G'(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G'' \right] (-b_2)^{\frac{x-p-\tau-1}{2}} + \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right] (-a_1)^{\frac{x-p-\tau-4}{2}} \right\} \\
x &= p+q+5, p+q+7, \dots \quad (A.6.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=p+q+5, p+q+7, \dots}^{\infty} \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_\zeta dm &= \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_\zeta}}{2} (1-e^{-2\tau_\zeta}) \left\{ \left[G'(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G'' \right]^2 \frac{b_2^4}{1-b_2^2} \right. \\
& \left. + \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right]^2 \frac{a_1^2}{1-a_1^4} + 2 \left[G'(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G'' \right] \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right] \frac{-b_2^2 a_1}{1+a_1^2 b_2} \right\} \\
& \quad (A.6.29)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
G'' &= -A e^{\tau_s} e^{-\tau_\zeta} (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1) \\
H' &= -B e^{\tau_s} e^{-\tau_\zeta} (b_2 \zeta_{p+q} - a_1^2 (b_2 \zeta_{p+q} + 1 - v))
\end{aligned} \right\} \quad (A.6.30)$$

式(4.40) 第5式および (A.6.8) より

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x, m)_\zeta &= e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_\zeta} \left\{ \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right] (-b_2)^{\frac{x-p-\tau-2}{2}} + \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right] (-a_1)^{\frac{x-p-\tau-4}{2}} \right\} \\
& + \left[K(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + K' \right] (-b_2)^{\frac{x-p-\tau-2}{2}} \\
x &= p+q+4, p+q+6, \dots \quad (A.6.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=p+q+4, p+q+6, \dots}^{\infty} \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_\zeta dm &= \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_\zeta}}{2} (1-e^{-2\tau_\zeta}) \left\{ \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right]^2 \frac{b_2^2}{1-b_2^2} \right. \\
& \left. + \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right]^2 \frac{1}{1-a_1^4} + 2 \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right] \left[H(-a_1)^{\frac{\tau}{2}} + H' \right] \frac{-b_2}{1+a_1^2 b_2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2e^{-\tau_3} e^{\tau_L} (1 - e^{-\tau_L}) \left\{ [G(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G'''] \left[K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K' \right] \frac{b_2^2}{1 - b_2^2} \right. \\
 & + \left. [H(-a_1)^q + H'] \left[K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K' \right] \frac{-b_2}{1 + a_1^2 b_2} \right\} \\
 & + \left[K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K' \right]^2 \frac{b_2^2}{1 - b_2^2} \tau_L
 \end{aligned} \quad (A.6.32)$$

ただし、

$$G''' = -De^{\tau_3} e^{-\tau_L} (b_1 \zeta_{p+q} + v - 1), \quad K' = b_1 \zeta_{p+q} + v - 1 \quad (A.6.33)$$

式(4.40)第9式および(A.6.14)より、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(x, m)_> &= e^{-m\tau_3} e^{\tau_L} \left\{ [G'(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G''] (-b_2)^{\frac{x+p+q}{2}} + [H(-a_1)^q + H'] (-a_1)^{x-p-q-3} \right\} \\
 x &= p+q+4, p+q+6, \dots
 \end{aligned} \quad (A.6.34)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{x=p+q+4 \\ p+q+6, \dots}}^{\infty} \int_{\tau_4/\tau_5}^1 \mathcal{E}^2(x, m)_> dm &= \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_5}) \left\{ [G'(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G''] \frac{b_2^4}{1 - b_2^2} \right. \\
 &+ \left. [H(-a_1)^q + H']^2 \frac{a_1^2}{1 - a_1^4} + 2[G'(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G''] [H(-a_1)^q + H'] \frac{-b_2^2 a_1}{1 + a_1^2 b_2} \right\}
 \end{aligned} \quad (A.6.35)$$

式(4.40)第9式および(A.6.15)より、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(x, m)_> &= e^{-m\tau_5} e^{\tau_L} \left\{ [G(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G'''] (-b_2)^{\frac{x-p-q-1}{2}} + [H(-a_1)^q + H'] (-a_1)^{x-p-q-3} \right\} \\
 &+ \left[K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K' \right] (-b_2)^{\frac{x-p-q-1}{2}} \\
 x &= p+q+3, p+q+5, \dots
 \end{aligned} \quad (A.6.36)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{x=p+q+3 \\ p+q+5, \dots}}^{\infty} \int_{\tau_4/\tau_5}^1 \mathcal{E}^2(x, m)_> dm &= \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_5}) \left\{ [G(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G'''] \frac{b_2^2}{1 - b_2^2} \right. \\
 &+ \left. [H(-a_1)^q + H']^2 \frac{1}{1 - a_1^4} + 2[G(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G'''] [H(-a_1)^q + H'] \frac{-b_2}{1 + a_1^2 b_2} \right\} \\
 &+ 2e^{\tau_L} (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_5}) \left\{ [G(-b_2)^{\frac{q}{2}} + G'''] \frac{b_2^2}{1 - b_2^2} + [H(-a_1)^q + H'] \frac{-b_2}{1 + a_1^2 b_2} [K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K'] \right\} \\
 &+ [K(-b_2)^{\frac{q}{2}} + K']^2 \frac{b_2^2}{1 - b_2^2} (\tau_5 - \tau_L)
 \end{aligned} \quad (A.6.37)$$

式 (A. 6. 29) および (A. 6. 35) より、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{x=p+q+4, \\ p+q+6, \dots}}^{\infty} \int_{\tau_4/\tau_s}^1 \varepsilon^2(x, m)_> dm + \sum_{\substack{x=p+q+5, \\ p+q+7, \dots}}^{\infty} \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_< dm \\
 &= \frac{1-e^{-2\tau_s}}{2} \left\{ \left[G'(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G'' \right]^2 \frac{b_2^4}{1-b_2^2} + [H(-a_1)^{\tau} + H']^2 \frac{a_1^2}{1-a_1^4} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left[G'(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G'' \right] [H(-a_1)^{\tau} + H'] \frac{-b_2^2 a_1}{1+a_1^2 b_2} \right\} \quad (A. 6. 38)
 \end{aligned}$$

式 (A. 6. 32) および (A. 6. 37) より、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{x=p+q+3, \\ p+q+5, \dots}}^{\infty} \int_{\tau_4/\tau_s}^1 \varepsilon^2(x, m)_> dm + \sum_{\substack{x=p+q+4, \\ p+q+6, \dots}}^{\infty} \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_< dm \\
 &= \frac{1-e^{-2\tau_s}}{2} \left\{ \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right] \frac{b_2^2}{1-b_2^2} + [H(-a_1)^{\tau} + H']^2 \frac{1}{1-a_1^4} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right] [H(-a_1)^{\tau} + H'] \frac{-b_2}{1+a_1^2 b_2} \right\} \\
 & \quad + 2(1-e^{-\tau_s}) \left\{ \left[G(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + G''' \right] \frac{b_2^2}{1-b_2^2} + [H(-a_1)^{\tau} + H'] \frac{-b_2}{1+b_2 a_1^2} \right\} \left[K(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + K' \right] \\
 & \quad + \tau_s \left[K(-b_2)^{\frac{\tau}{2}} + K' \right]^2 \frac{b_2^2}{1-b_2^2} \quad (A. 6. 39)
 \end{aligned}$$

式 (4. 40) より、

$$\varepsilon(1, m)_< = 1 \quad (A. 6. 40)$$

$$\tau_s \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(1, m)_< dm = \tau_L \quad (A. 6. 41)$$

$$\varepsilon(x, m)_< = v e^{\tau_L} e^{-m\tau_s} e^{-(x-1)\tau_s} + 1-v, \quad x=2, 3, \dots, p+1 \quad (A. 6. 42)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_s \sum_{x=2, 3, \dots}^{p+1} \int_0^{\tau_4/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_< dm &= \frac{v^2 e^{2\tau_L}}{2} (1-e^{-2\tau_L}) \frac{a_1^2 (1-a_1^{2p})}{1-a_1^2} + p(1-v)^2 \tau_L \\
 & \quad + 2(1-v) v e^{\tau_L} (1-e^{-\tau_L}) \frac{(-a_1) [1-(-a_1)^p]}{1+a_1} \quad (A. 6. 43)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(x, m)_> = v e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} e^{-(x-1)\tau_s} + 1 - v, \quad x=1, 2, \dots, p \quad (\text{A. 6.44})$$

$$\tau_s \sum_{x=1, 2, \dots, p} \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(x, m)_> dm = \frac{v^2 e^{2\tau_L} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_s})}{2} \frac{1 - (-a_1)^{2p}}{1 - a_1^2} \\ + p(1-v)^2(\tau_s - \tau_L) + 2(1-v)v e^{\tau_L} (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) \frac{1 - (-a_1)^p}{1 + a_1} \quad (\text{A. 6.45})$$

式 (A. 6.43) および (A. 6.45) より、

$$\tau_s \sum_{x=1, 2, \dots, p} \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(x, m)_> dm + \tau_s \sum_{x=2, 3, \dots, p+1} \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(x, m)_< dm \\ = \frac{v^2(1 - e^{-2\tau_s})}{2} \frac{1 - a_1^{2p}}{1 - a_1^2} + 2(1-v)v(1 - e^{-\tau_s}) \frac{1 - (-a_1)^p}{1 + a_1} + p(1-v)^2 \tau_s \quad (\text{A. 6.46})$$

式 (A. 40) より

$$\varepsilon(p+1, m)_> = e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}] - (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) \quad (\text{A. 6.47})$$

$$\tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+1, m)_> dm = \frac{e^{2\tau_L} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_s})}{2} [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}]^2 \\ + (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1})^2 (\tau_s - \tau_L) \\ - 2(b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) e^{\tau_L} [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}] (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) \quad (\text{A. 6.48})$$

$$\varepsilon(p+2, m)_< = e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}] \\ - (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) \quad (\text{A. 6.49})$$

$$\tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+2, m)_< dm = \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_L}}{2} [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}]^2 (1 - e^{-2\tau_L}) \\ + (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1})^2 \tau_L - 2(b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) [v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}] \\ \times e^{-\tau_s} e^{\tau_L} (1 - e^{-\tau_L}) \quad (\text{A. 6.50})$$

式 (A. 6.48) および (A. 6.50) より

$$\tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+1, m)_> dm + \tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+2, m)_< dm$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - e^{-2\tau_s}}{2} \left[v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1} \right]^2 \\
&\quad - 2(1 - e^{-\tau_s})(b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}) \left[v(-a_1)^p + 1 - v + b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1} \right] \\
&\quad + \tau_s (b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1})^2 \quad (A. 6. 51)
\end{aligned}$$

式(4.40)より、

$$\begin{aligned}
\varepsilon(p+2, m)_> = e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} \left[v(-a_1)^{p+1} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right] + 1 - v \\
\quad (A. 6. 52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+2, m)_> dm = \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) \left[v(-a_1)^{p+1} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right]^2 \\
+ (1-v)^2 (\tau_s - \tau_L) \\
+ 2(1-v) \left[v(-a_1)^{p+1} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right] e^{\tau_L} (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) \\
\quad (A. 6. 52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(p+3, m)_< = e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} \left[v(-a_1)^{-(p+1)} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right] \\
+ 1 - v \quad (A. 6. 53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+3, m)_< dm = \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_L}}{2} (1 - e^{-2\tau_L}) \left[v(-a_1)^{-(p+1)} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right]^2 \\
+ (1-v)^2 \tau_L + 2(1-v) \left[v(-a_1)^{-(p+1)} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right] e^{-\tau_s} e^{\tau_L} (1 - e^{-\tau_L}) \\
\quad (A. 6. 54)
\end{aligned}$$

式(A. 6. 52)および(A. 6. 54)より、

$$\begin{aligned}
&\tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+2, m)_> dm + \tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+3, m)_< dm \\
&= \frac{1 - e^{-2\tau_s}}{2} \left[v(-a_1)^{p+1} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right]^2 \\
&+ 2(1-v)(1 - e^{-\tau_s}) \left[v(-a_1)^{p+1} - (1+a_1)(1-v) - \frac{b_1 \zeta_p + b_2 \zeta_{p-1}}{d} \right] + (1-v)^2 \tau_s \quad (A. 6. 55)
\end{aligned}$$

式(4.40)および(A.6.13)より、

$$\begin{aligned} \varepsilon(p+q+2, m)_> &= e^{-m\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right\} - b_2 \zeta_{p+q} \quad (\text{A.6.56}) \\ \tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+q+2, m)_> dm &= \frac{e^{2\tau_L}}{2} (e^{-2\tau_L} - e^{-2\tau_s}) \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right]^2 \\ &\quad - 2b_2 \zeta_{p+q} e^{\tau_L} \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right] (e^{-\tau_L} - e^{-\tau_s}) + b_2^2 \zeta_{p+q}^2 (\tau_s - \tau_L) \end{aligned} \quad (\text{A.6.57})$$

ただし、

$$I' = \frac{1 - e^{-\tau_s}}{1 + e^{-\tau_s}} (v-1) + b_2 \zeta_{p+q} \quad (\text{A.6.58})$$

式(4.40)および(A.6.6)より、

$$\begin{aligned} \varepsilon(p+q+3, m)_< &= e^{-m\tau_s} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} \left\{ G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right\} - b_2 \zeta_{p+q} \quad (\text{A.6.59}) \\ \tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+q+3, m)_< dm &= \frac{e^{-2\tau_s} e^{2\tau_L}}{2} (1 - e^{-2\tau_L}) \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right]^2 \\ &\quad - 2b_2 \zeta_{p+q} e^{-\tau_s} e^{\tau_L} \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right] (1 - e^{-\tau_L}) + b_2^2 \zeta_{p+q}^2 \tau_L \end{aligned} \quad (\text{A.6.60})$$

式(A.6.57)および(A.6.60)より、

$$\begin{aligned} &\tau_s \int_{\tau_L/\tau_s}^1 \varepsilon^2(p+q+2, m)_> dm + \tau_s \int_0^{\tau_L/\tau_s} \varepsilon^2(p+q+3, m)_< dm \\ &= \frac{1 - e^{-2\tau_s}}{2} \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right]^2 \\ &\quad - 2b_2 (1 - e^{-\tau_s}) \zeta_{p+q} \left[G'(-b_2)^{\frac{q+2}{2}} + H(-a_1)^{q-1} + I' \right] + \tau_s b_2^2 \zeta_{p+q}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.61})$$

式(A.6.26), (A.6.27), (A.6.38), (A.6.39), (A.6.41), (A.6.46), (A.6.51), (A.6.55), (A.6.61)を加え合せることにより、式(4.57)および(4.58)の結果を得る。

附 録 7 (本文 100 頁 5.3.1)

式 (A.3.2) の関係および、式 (A.4.9) において $T_L=0$ とおいたものより、

$$HG^*(z) \equiv Z[H(s)G(s)] = \frac{z^{-(n+1)}}{d(1-\alpha z^{-1})} \quad (A.7.1)$$

つぎに、近藤、菅我の有限整定応答系設計法による開ループ制御装置 $D^*(z)$ はつぎの関係で与えられる。図 A.7 において、

$$D^*(z) = D_1^*(z) G_D^*(z) \quad (A.7.2)$$

$$1 - D_1^*(z) G_N^*(z) = \text{LCM}[R_D^*(z), NG_{1D}^*(z)] Q^*(z) \quad (A.7.3)$$

ここに、 $G_D^*(z)$ 、 $G_N^*(z)$ はそれぞれ、 $G^*(z)$ の分母 分子で、 $R_D^*(z)$ および、 $NG_{1D}^*(z)$ はそれぞれは $R(s)$ 、 $N(s)G_1(s)$ の z 変換の分母である。

また、LCM は $R_D^*(z)$ 、 $NG_{1D}^*(z)$ の最小公倍関数を表わす。 $D_1^*(z)$ 、 $Q^*(z)$ はいずれも z^{-1} についての有限次多項式で、式 (A.7.3) が満足

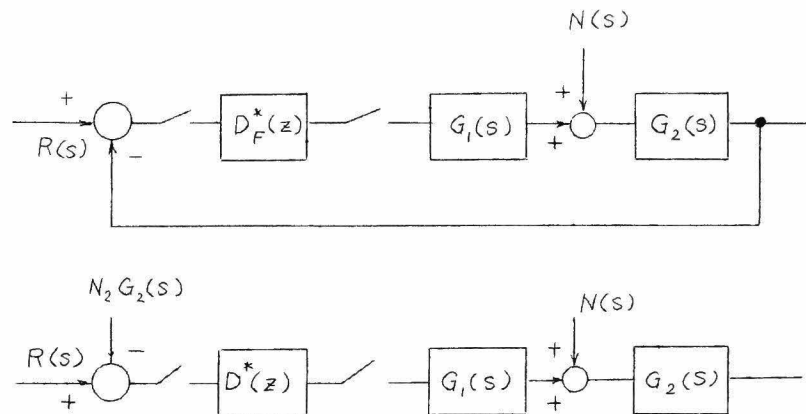


図 A - 7

されるかぎり次数は任意で、それらの係数を適当に仮定し、未定係数法で決定すればよい。しかし、整定時間を短くするためにはできるだけその次数が小さいことが望ましい。ただし $\text{LCM}[R_D^*(z), NG_{1D}^*(z)]$ の

z^{-1} の次数を n とすれば、 $D^*(z)$ の次数は $(n-1)$ 次または、それ以上でなければならない。

この場合、 $G_1(s) = H(s)$, $G_2(s) = G(s)$ なる対応をなしているから、 $R(s)$, $N(s)$ 共ステップ関数である場合に対する $D^*(z)$ は式(A.7.1) の関係を用うることにより、

$$D^*(z) = d(1 - az^{-1})(b_1 - b_2 z^{-1}) \quad (\text{A.7.4})$$

附 録 8 (本文 118 頁 5.3.3)

図 A.4.1 の制御系において、 $G(s)$ が

$$G(s) = \frac{K}{s(T_0 s + 1)} \quad (\text{A.8.1})$$

なるサーボ形伝達関数の場合に対し、附録 4 に示した July および Schrueder の有限整定応答補償を実施するための制御装置(開ループ制御装置) $D^*(z)$ の導出を行う。

$$Z_m[H(s)G(s)] = K(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{mTz^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{T_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{Tz^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{T_0 e^{-mT/T_0} z^{-1}}{1 - z^{-1} e^{-T/T_0}} \right\} \quad (\text{A.8.2})$$

附録 4 に述べた事柄および式(A.8.2)より、

$$D^*(z) = d(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/T_0} z^{-1}) \quad d: \text{未定定数} \quad (\text{A.8.3})$$

制御量の拡張変換 $Y^*(z, m)$ は入力を大きさ R のステップとすると、

$$\begin{aligned} Y^*(z, m) &= KR \left\{ \frac{mTz^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{T_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{Tz^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{T_0 e^{-mT/T_0} z^{-1}}{1 - e^{-T/T_0} z^{-1}} \right\} d(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/T_0} z^{-1}) \\ &= KR \left\{ mT(1 - z^{-1} e^{-T/T_0}) - T_0(1 - z^{-1} e^{-T/T_0}) + T(1 - z^{-1} e^{-T/T_0}) \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + T_0(1 - z^{-1}) e^{-mT/T_0} \right\} d z^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.8.4})$$

附録 4 におけると同様、最終値定理により d を決定する。すなわち、

$$KRTd(1 - e^{-T/T_0}) = R, \quad \therefore d = \frac{1}{KT(1 - e^{-T/T_0})} \quad (\text{A.8.5})$$

附 録 9 (本文 119 頁 5.3.3)

$$f_2 - f_1 = -\frac{v}{1-b_2} + f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}$$

$$f_3 - f_2 = -\frac{v}{1-b_2} + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) b_2$$

$$\vdots$$

$$+) f_i - f_{i-1} = -\frac{v}{1-b_2} + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) b_2^{i-2}$$

$$f_i - f_1 = -\frac{v}{1-b_2} (i-1) + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) (1 + b_2 + \dots + b_2^{i-2})$$

$$= -\frac{v}{1-b_2} (i-1) + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{1-b_2^{i-1}}{1-b_2}$$

$$= (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{1}{1-b_2} - \frac{v}{1-b_2} (i-1) - (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{b_2^{i-1}}{1-b_2}$$

$$f_i = f_1 + (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{1}{1-b_2} - \frac{v}{1-b_2} (i-1) - (f_2 - f_1 + \frac{v}{1-b_2}) \frac{b_2^{i-1}}{1-b_2}$$

(A 9)

附 録 10 (本文 120 頁 5.3.3)

$$f_2 - f_1 = \frac{v}{1-b_2} + f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}$$

$$f_3 - f_2 = \frac{v}{1-b_2} + (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) b_2$$

$$\vdots$$

$$+) f_i - f_{i-1} = \frac{v}{1-b_2} + (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) b_2^{i-2}$$

$$f_i - f_1 = \frac{v}{1-b_2} (i-1) + (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) (1 + b_2 + \dots + b_2^{i-2})$$

$$= \frac{v}{1-b_2} (i-1) + (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) \frac{1-b_2^{i-1}}{1-b_2}$$

$$f_i = f_1 + (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) \frac{1}{1-b_2} + \frac{v}{1-b_2} (i-1) - (f_2 - f_1 - \frac{v}{1-b_2}) \frac{b_2^{i-1}}{1-b_2} \quad (A.10)$$

附 録 11 (本文 121 頁 5.3.3)

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 &= -\frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} + f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \\ f_3 - f_2 &= +\frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] b_2 \\ &\vdots \\ +) \quad f_{2i+1} - f_{2i} &= +\frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] b_2^{2i-1} \\ f_{2i+1} - f_1 &= 0 + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{1 - b_2^{2i}}{1 - b_2} \\ \therefore f_{2i+1} &= f_1 + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{1 - b_2^{2i}}{1 - b_2} \quad (A.11.1) \end{aligned}$$

同様にして

$$f_{2(i+1)} = f_1 - \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} + \left[f_2 - f_1 + \frac{v(b_2 - b_1)}{1 + b_2} \right] \frac{1 - b_2^{2(i+1)}}{1 - b_2} \quad (A.11.2)$$

附 録 12 (本文 232 頁 9.5)

図 A.12.1 に示すように直流リレーのフィールドに大きな容量のコンデンサを並列につなぎ、直流電圧を加えた場合、リレーのオン・オフ動作のおくれはリレーの動作電流が保持電流よりも大きいという性質から図 A.12.2 に示すようにスイッチ S をオフにした場合の方がオンにした場合よりも相当おくれが大になるのが普通である。本文 頁に述べたサンプリング制御装置の各演算ステップの長さは、このスイッチオフ時のリレーの動作おくれ時間 T_B をもって構成している。

図 A12.3 に示すようにその各接点が樹状回路状に構成されたリレー群において、各リレー共通電源端子 A B の間に直流電圧を加えれば、各リレーは必ず

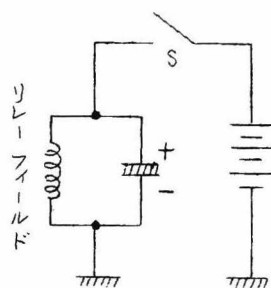


図 A 12.1

$r_a, r_b, r_c, r_d, r_e, r_f$: オフ
(フィールド無励磁)

$r'_a, r'_b, r'_c, r'_d, r'_e, r'_f$: オン
(フィールド励磁)

(A-12-1)

の状態を保つ。したがって、スタート・スイッチ S_1 に直列

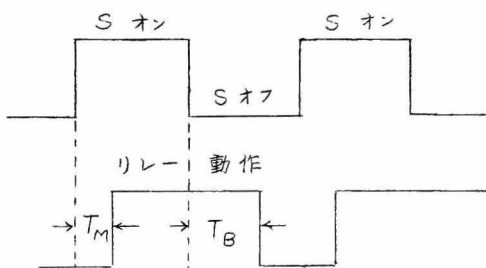


図 A 12.2

に入っている $r_b, r_c, r_d, r_e,$

r_f のブレイク接点 (break contact B で表わす) はいずれもオンの状態にある。かつ、 r'_f はオンの状態 (励磁状態) であるから、そのメイク接点 (make contact M と表わす) M_2 はオンになっている。したがって、 S_1 を押せば M_1 に直列に入ったリレー r_a のフィールドが励磁され、動作時間おくれ T_M (図 A12.1 参照) の後 r_a がオン (すなわちメイク接点がオン、ブレイク接点がオフ) になる。 r_a がオンになると T_B だけおくれ r'_a がオフになる。以下同様にして将棋倒し式に r_b オン、 r'_b オフ、 r_c オン……と動作が継続し、

$r_a, r_b, r_c, r_d, r_e, r_f$: オン (A.12.2)

$r'_a, r'_b, r'_c, r'_d, r'_e, r'_f$: オフ

なる状態に遷する。ここでリレー r_a のフィールドに直列に入った r'_f のメイク接点 M_2 がオフになるから、 T_B の後に r_a がオフに戻る。 r_a がオフに戻った後、 r'_a が T_M だけ経過後オンの状態に戻る。以下同様にして前と逆の動作が継続し、全リレーが式 (A-12.1) で表わされる状態に戻って静止する。スタート・スイッチ S_1 に直列に入ったリレー r_g

は S_1 両端にセルフ・ホールド作用 (self holding) を与えるためのもので r_0 動作完了と共にその動作を終る。また r_5 は式 (A.12.1) の状態以外では動作しないから、各リレー群の動作が完了しないかぎり、スタートスイッチ S_1 は何等回路状態に作用をおよぼさない。したがって、クロックパルスにより一定時間 (1 サンプリング周期 T) 毎に S_1 を押すことにより本文図 9.4 のタイムチャートに示すような 12 のステップに対応するリレー動作が得られる。図 A.12.4 はリレー群 $r_a \sim r_f$ または $r'_a \sim r'_f$ のメイク・ブレイク接点を図 A.12.3 上半に示すように接続した場合、図 A.12.3 における端子 0 と 1 ~ 12 の間の導通、非導通の模様を示したものである。この図より明らかなように、このリレー樹状回路の各接点を図 A.12.5 のリレー群 $r_1 \sim r_{12}$ のフィールド回路に挿入することにより、 $r_1 \sim r_{12}$ の各リレーを図 9.4 に示したタイムチャート通りオン・オフ動作させることができる。

図 9.4 に示したリレー r_{12} は 1 サンプリング周期 T 毎にオン・オフを繰返すものである。図 A.12.6 はリレー r_{12} 駆動のため設けられたリレーによる双安定回路 (bistable circuit) である。

図において、端子 a 対アース間に直流電圧を加えればリレー V, V' のどちらか一方がオン、他方がオフになる。いま仮に各リレーの状態が

$$V : \text{オン}, \quad V' : \text{オフ} \quad (\text{A.12.3})$$

であったとする。リレー T, T' は図より明らかなようにスイッチ S_2 を押さないかぎり、いずれもオフの状態にとどまる。

上記の状態において、各接点の状態はつぎのようになっている。

M_1 : 断	M'_1 : 断	
B_1 : 断	B'_1 : 接	
M_2 : 断	M'_2 : 断	(A.12.4)
B_2 : 接	B'_2 : 接	
B_3 : 接	B'_3 : 断	

このとき、スイッチ S_2 を押せば T' がオンになるから各接点の状態はつぎのようになる。

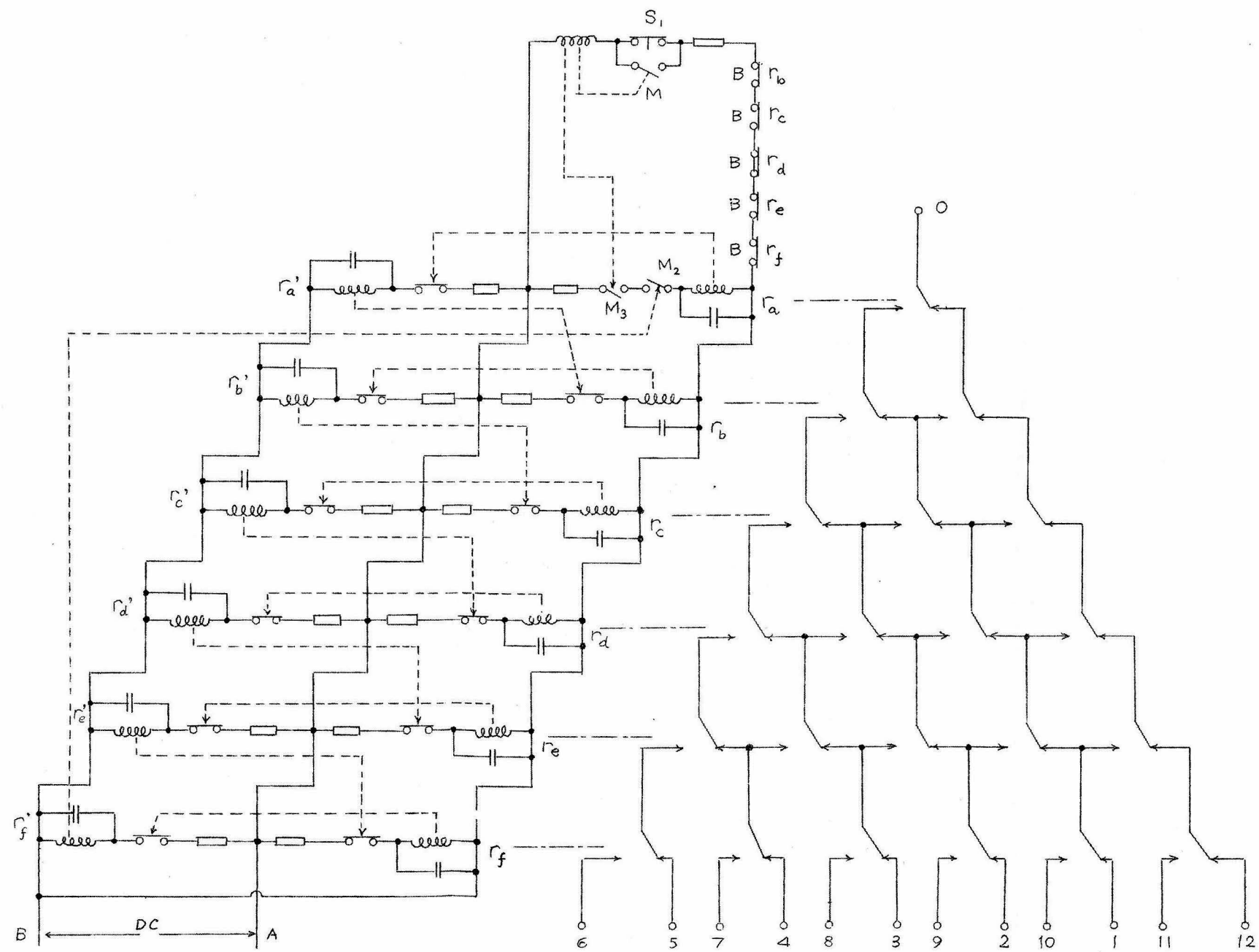


图 A - 12. 3

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

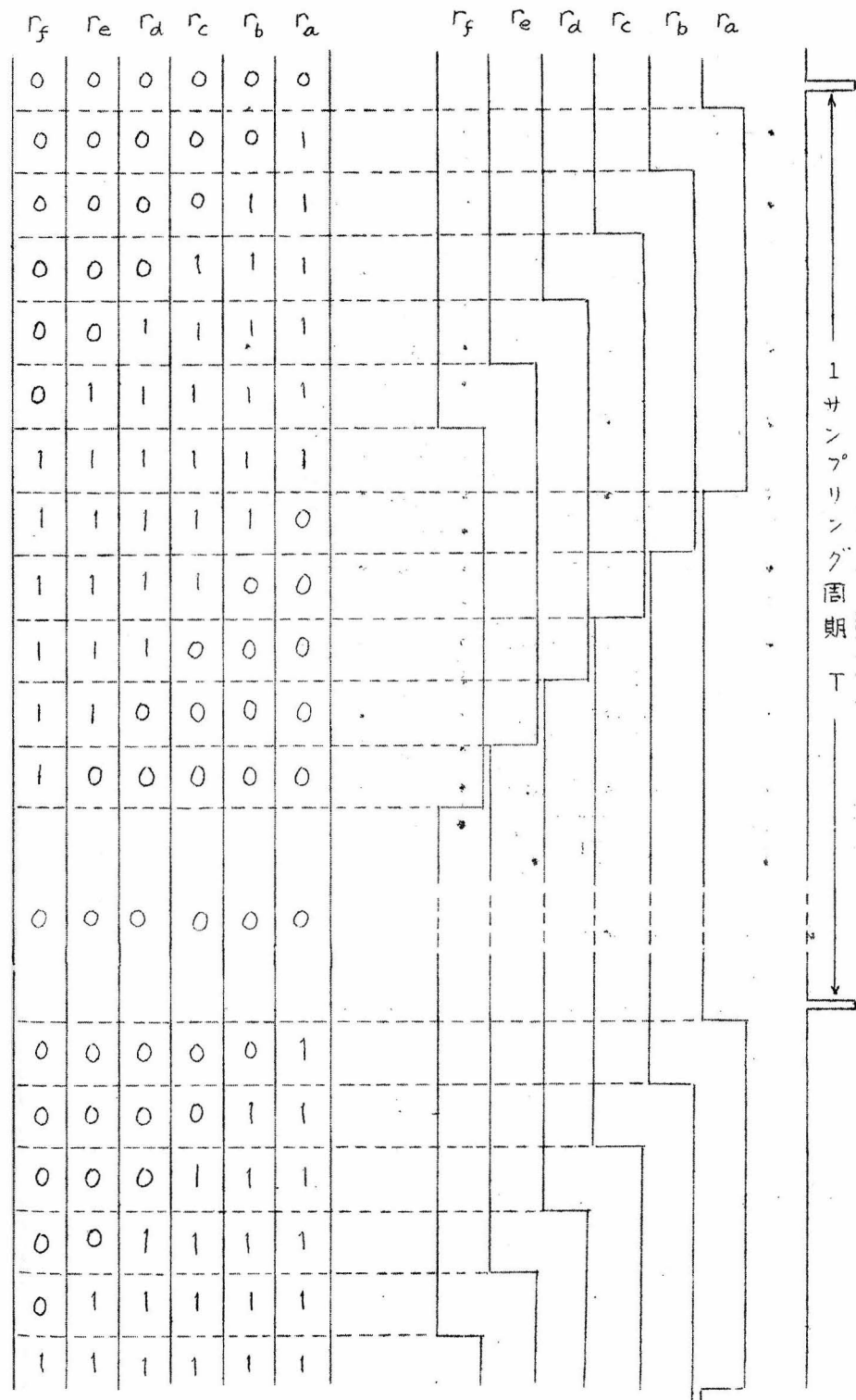


図 A. 12, 4

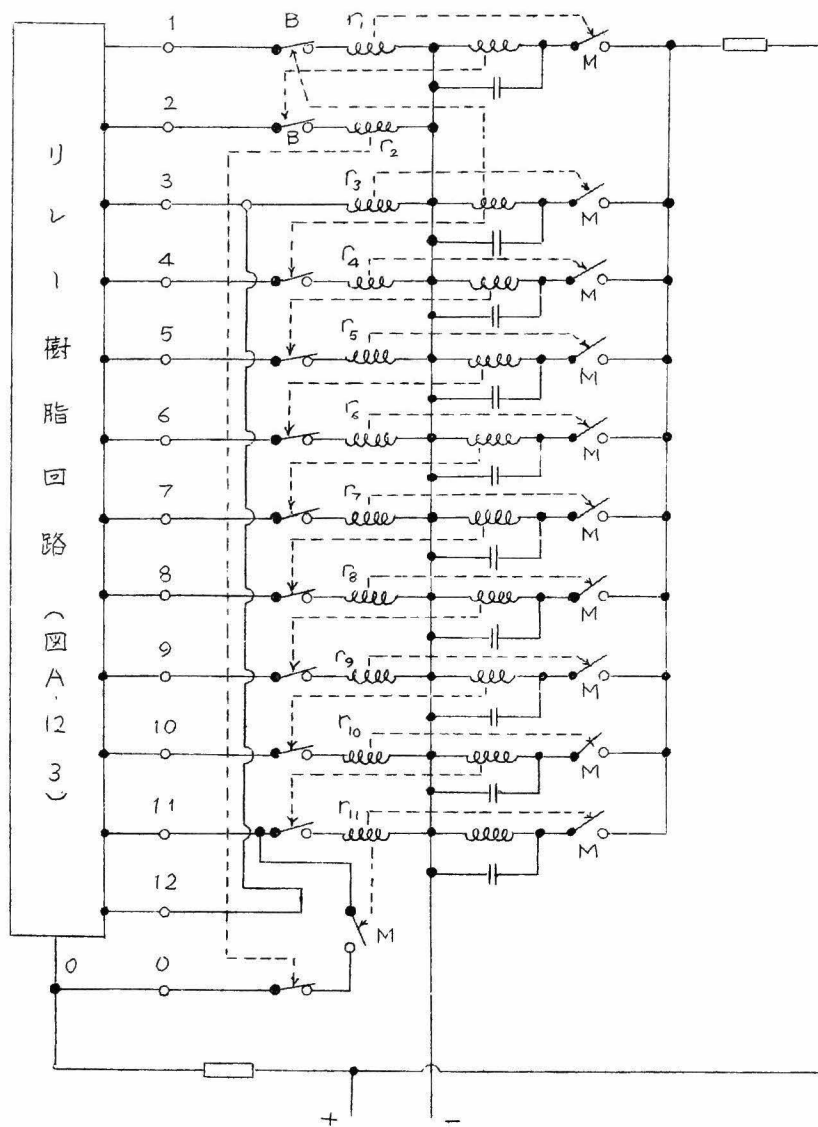


图 A 12. 5

M_1 : 断	M'_1 : 接
B_1 : 断	B'_1 : 接
M_2 : 断	M'_2 : 接
B_2 : 断	B'_2 : 接
B_3 : 接	B'_3 : 断

(A. 12. 5)

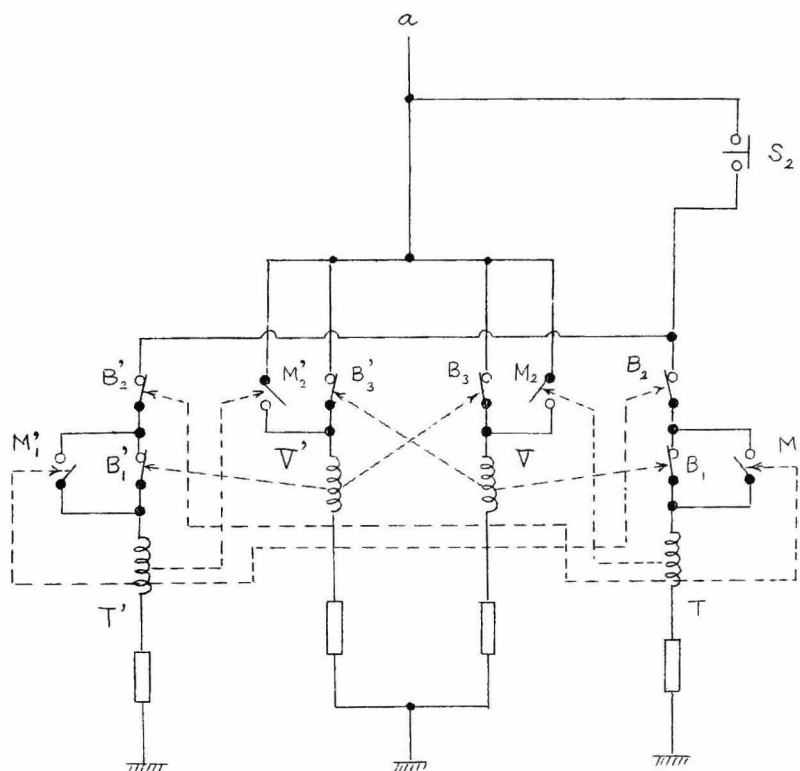


図 A-12.6

したがって、各リレーおよび、接点は直ちにつきの状態に移行する。

∇ : オフ, ∇' : オン, T : オフ, T' : オン (A-12.6)

M_1 : 断	M'_1 : 接	
B_1 : 接	B'_1 : 断	
M_2 : 断	M'_2 : 接	(A.12.7)
B_2 : 断	B'_2 : 接	
B_3 : 断	B'_3 : 接	

式 (A.12.5) から (A.12.7) の状態へは瞬間的に移行するが、 S_2 を押している時間はこの移行時間より長くえらぶ必要がある。

つぎに S_2 が開かれた後における各接点の状態は、

M_1 : 断	M_1' : 断	
B_1 : 接	B_1' : 断	
M_2 : 断	M_2' : 断	(A.12.8)
B_2 : 接	B_2' : 接	
B_3 : 断	B_3' : 接	

となり、結局式(A-12-4)の状態が反転したことになる、各リレーの状態は、

∇ : オフ, ∇' : オン, T : オフ, T' : オフ (A.12.9)

となり、式(A.12.3)と比較すれば明らかなようにリレー ∇ と ∇' の状態が入れかわっている。

以上の説明から明らかなように、スイッチ S_2 を短時間、開じる毎にリレー ∇ , ∇' が交互にオン・オフ状態をくりかへし、リレーによる双安定動作が得られる。したがって、1サンプリング周期 T でもって、 S_2 をスイッチ・インすることにより、リレー r_{12} (リレー ∇ 又は ∇' の接点を用うる)を図9.4のタイム・チャートに従って動作させることができる。

附 録 13 (本文 243 頁 10.3)

図 A.13.1 に示すサンプル値系の出力の2乗平均 $\overline{y(t)^2} = \overline{y(nT)^2}$ は入力ランダム信号 $x(t)$ のスペクトル密度が与えられればつきのようにして計算できる。

パルスサンプル値 $y(nT)$ の自己相関関数を $\varphi_{yy}^*(\tau)$ とすれば自己相関関数の定義から、

$$\varphi_{yy}^*(\tau) =$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} y^*(t) y^*(t+\tau) dt \quad (A.13.1)$$

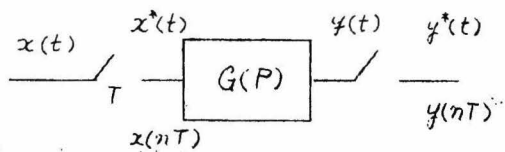


図 A-13-1

$$y^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t-kT) \quad T: \text{サンプリング周期}$$

上式第1式はつぎのように変形される。

$$\varphi_{yy}^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT) \delta(\tau-kT) \quad (\text{A.13.2})$$

パルスサンプル値 $y(nT)$ のスペクトル密度 $S_{yy}^*(P)$ は上式のフーリエ変換で与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} S_{yy}^*(P) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT) \delta(\tau-kT) e^{-P\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT) e^{-PkT} \quad (\text{A.13.3}) \end{aligned}$$

ここで、 e^{PT} を z で置きかえれば、これは $\frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT)$

の 2 sided- z transformation を意味することになる。2 sided z 変換と普通の z 変換 (1 sided z transformation) との関係は、連続系におけるフーリエ変換とラプラス変換の関係に対応する。

$$S_{yy}^*(P) \Big|_{e^{-PT}=z^{-1}} \equiv S_{yy}^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT) z^{-k} \quad (\text{A.13.4})$$

故に

$$\frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT) y(nT+kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} S_{yy}^*(z) z^{k-1} dz \quad (\text{A.13.5})$$

ここに Γ は z 平面における単位円を意味する。 k は $-\infty \sim +\infty$ の値をとるものであるから、式 (A.13.5) の積分は $k > 0$ に対しては単位円内に存在する極に対する $S_{yy}^*(z) z^{k-1}$ の留数の和に等しく、 $k < 0$ に対しては、単位円外の極に対する留数の和に等しい。式 (A.13.5) において $k=0$ とおけば、

* $S_{yy}^*(P)$ はサンプル値パワースペクトル又はスペクトル密度 (sampled power spectrum または sampled spectral density) と呼ばれる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y(nT)^2 = \overline{y(nT)^2} = \overline{y(t)^2} = \frac{T}{2\pi j} \oint S_{yy}^*(z) z^{-1} dz \quad (A.13.6)$$

$z = e^{j\omega T}$ とおけば

$$\overline{y(nT)^2} = \overline{y(t)^2} = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_{yy}^*(e^{j\omega T}) d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}^*(e^{j\omega T}) d\omega T \quad (A.13.7)$$

すなわち、 $S_{yy}^*(e^{j\omega T})$ が図 A-13.2 に示すように求まれば、この曲線が ωT 軸との間に形成する面積を計算することにより $\overline{y(nT)^2}$ すなわち $\overline{y(t)^2}$ を求めることができる。面積は $0 \leq \omega T \leq \pi$ について求めればよい。

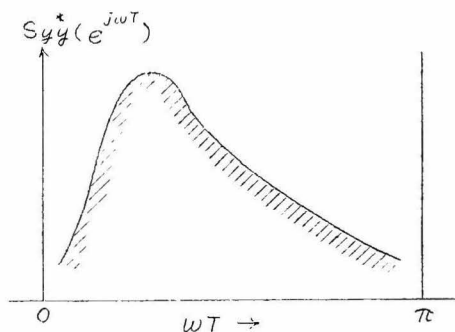


図 A-13-2

いま伝達要素 $G(p)$ のインパルス応答を $t=0, T, 2T, \dots$ 毎にサンプルしたものを $g(\ell T)$ ($\ell=0, 1, 2, \dots$) とすれば、

$$y(nT) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell T) x(nT - \ell T) \quad (A.13.8')$$

$$y(nT + kT) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT) x(\overline{n+k}T - jT)$$

式(A.13.8)を式(A.13.4)に用うれば、

$$\begin{aligned} S_{yy}^*(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell T) x(nT - \ell T) \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} g(jT) x(\overline{n+k}T - jT) \right] \right\} z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell T) \sum_{j=0}^{\infty} g(jT) \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(nT - \ell T) x(\overline{n+k}T - jT) \right\} z^{-k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell T) z^{\ell} \sum_{j=0}^{\infty} g(jT) z^{-j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(nT - \ell T) x(\overline{n+k-j}T) z^{-(\ell+k-j)} \\ &= G^*(z) G^*(z^{-1}) S_{xx}(z) \quad (A.13.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{故に } \overline{y(nT)^2} &= \overline{y(t)^2} = \frac{T}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) G^*(z^{-1}) S_{xx}^*(z) z^{-1} dz \\
&= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^*(e^{j\omega T}) G^*(e^{-j\omega T}) S_{xx}^*(e^{j\omega T}) d\omega T \\
&= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G^*(e^{j\omega T})|^2 S_{xx}^*(e^{j\omega T}) d\omega T \quad (\text{A.13.10})
\end{aligned}$$

ここに $S_{xx}^*(z)$ は入力定常ランダム信号 $x(t)$ を周期 T でサンプルした、場合えられるサンプル値パワー・スペクトルを表わす。 $x(t)$ に関するデータ、すなわち連続関数 $x(t)$ のパワー・スペクトル $S_{xx}(P)$ より、 $S_{xx}^*(z)$ を求めるにはつぎのようにする。

(1) ま連続関数 $x(t)$ の自己相関関数を $\varphi_{xx}(\tau)$ とすればスペクトル密度 (パワー・スペクトル) $S_{xx}(P)$ は衆知の如く

$$S_{xx}(P) = \int_{-\infty}^0 \varphi_{xx}(\tau) e^{-P\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-P\tau} d\tau \quad (\text{A.13.11})$$

$\varphi_{xx}(\tau)$ は偶関数であるから、

$$\begin{aligned}
S_{xx}(P) &= \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\sigma) e^{-P\sigma} d\sigma + \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-P\tau} d\tau \\
&= X(P) + X(-P) \quad (\text{A.13.12})
\end{aligned}$$

$X(P)$ の極はすべて p 平面の左半面に存在し、 $X(-P)$ の極は右半面に存在する。ところが $x(t)$ が定常不規則、かつエルゴート性に従う場合には式 (10.7) と同様

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(nT) x(nT+\tau) \quad (\text{A.13.13})$$

で表わすことができるから、式 (A.13.2) の関係と用うると、

$$\begin{aligned}
S_{xx}^*(z) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(kT) z^{-k} \\
&= \frac{1}{T} \left[\sum_{k=-\infty}^0 \varphi_{xx}(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{xx}(kT) z^{-k} - \varphi_{xx}(0) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varphi_{xx}(rT) z^r + \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{xx}(kT) z^{-k} - \varphi_{xx}(0) \right] \quad (A.13.14)$$

式 (A.13.11), (A.13.14) 両式より,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{xx}(kT) z^{-k} = Z[X(P)] = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\lambda) \frac{d\lambda}{1-e^{-T(P-\lambda)}} \quad (A.13.15)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{xx}(kT) z^k = Z[X(-P)] = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\lambda) \frac{d\lambda}{1-e^{-T(P+\lambda)}} \quad (A.13.16)$$

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) dp \quad (A.13.17)$$

式 (A.13.15), (A.13.16) および (A.13.17) を式 (A.13.14) に代入すると

$$S_{xx}^*(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\lambda) \frac{1-e^{2T\lambda}}{[1-e^{-T(P-\lambda)}][1-e^{-T(P+\lambda)}]} d\lambda \quad (A.13.18)$$

式 (A.13.18) の積分路は式 (A.13.15), (A.13.16) および (A.13.17) の各積分を満足するようなものである必要がある。このような積分路は $X(P)$ が虚軸および、その右半面に極を持たない場合には虚軸自身になる。

さて、本文第3編第10章でとりあつかう系の外乱 $x(t)$ 対出力の関係は図 10.4 と参照することにより、図 A.13.3 のブロック図で与えられる。ここに、

$x(t)$: 外乱入力

$y(t)$: 制御系出力

$$G_2(P) = e^{-T_0 P}$$

$$G_1(P) = \frac{K_0 e^{-T_2 P}}{T_1 P + 1} H(P)$$

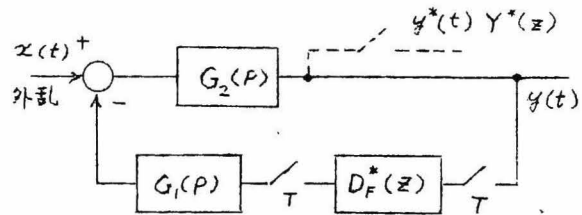


図 A.13.3

したがって、制御系出力のサンプル値パルス列 $y^*(t)$ の Z 変換は、

$$Y^*(z) = \frac{z[G_2(P)X(P)]}{1+z[G_2(P)G_1(P)]D_F^*(z)} \quad (A.13.19)$$

ところが、 $G_2(P)$ は純粹の遅延素子であるから $X(P)$ が定常不規則な信号である場合には $G_2(P)$ を通過することにより、その統計的性質に変化はなく、 $G_2(P)X(P)$ を改めて外乱入力と考えればよい。

図 A.13.4 (a), (b), (c) および (d) はサンプリング周期を変えた場合における $S_{xx}^*(e^{j\omega T})$, $S_{yy}^*(e^{j\omega T})$ を本文、式(10.12) および (A.13-9) の関係を用いてえがいた例であり、サンプリング周期を変えた場合、出力に現われる外乱のスペクトルの強さの分布がどのように変化するかを見ることができる。ただし、これらのグラフは制御装置として、本文、第3編第10章にあけたサンプル値(比例+積分)特性の制御装置 $D_F^*(z) = K_c/(1-z^{-1})$ を用い、ループ・ゲイン $K_c K_o$ をゲイン余裕 6db になるよう調整したときのものである。これらの図における S_{yy}^* と横軸との構成する面積を計算することにより、その場合の $\overline{y(t)^2}$ を求めることができる*。

附 録 14 (本文 245 頁 10.3)

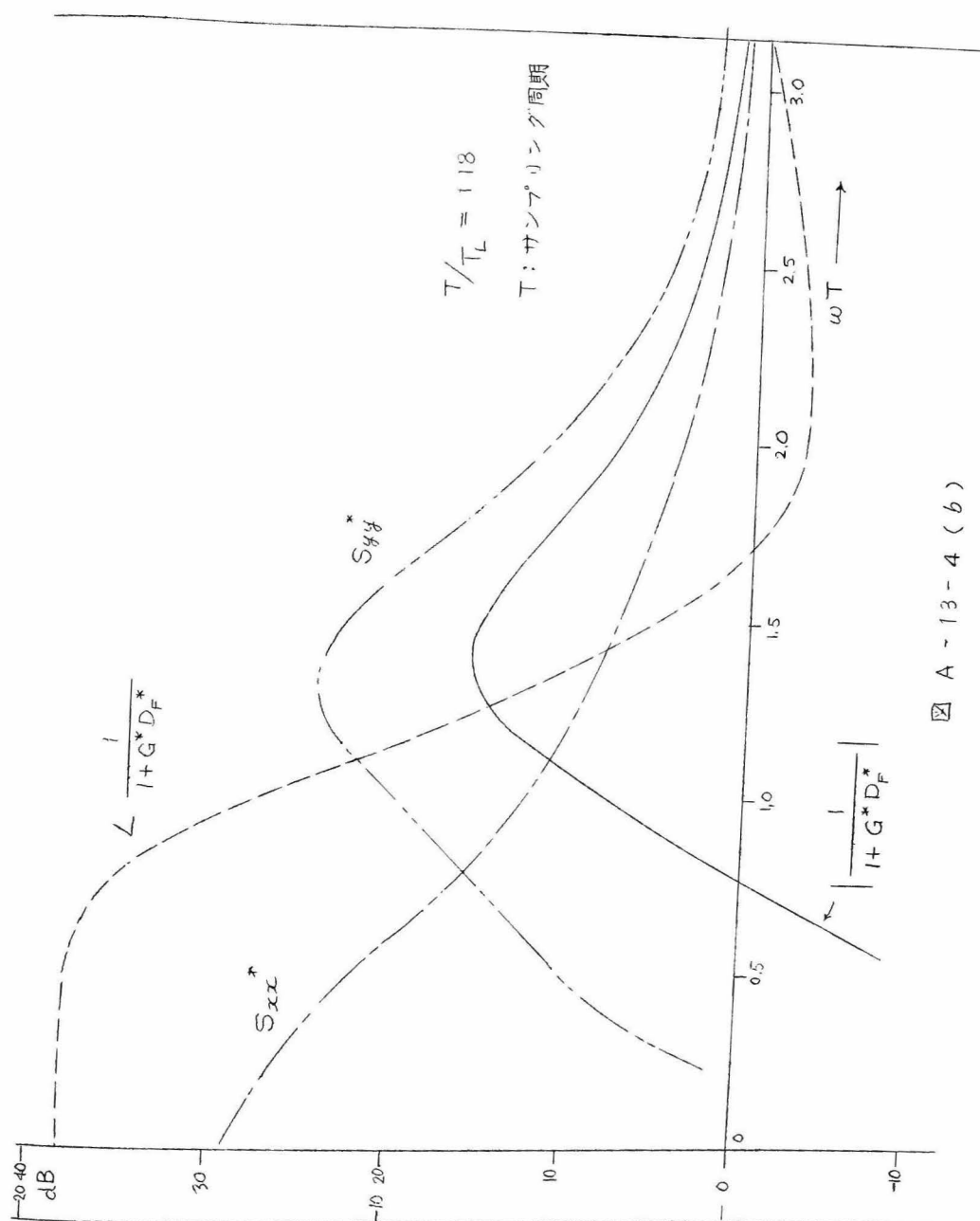
本文、式(10.2)において、 $K_i = 1$ とおくと、

$$X(P) = \frac{1}{\omega_i + p} \quad (A.14.1)$$

$$\text{故に } S_{xx}(P) = \frac{1}{\omega_i + p} + \frac{1}{\omega_i - p} \quad (A.14.2)$$

$$S_{xx}^*(z) = \frac{1}{T} \frac{1 - J_i^2}{(1 - J_i z^{-1})(1 - J_i z)} \quad , \quad J_i = e^{-\omega_i T} \quad (A.14.3)$$

* $\overline{y(t)^2}$ を求める目的に対しては附録 15 に示した方法によるのが便利である。



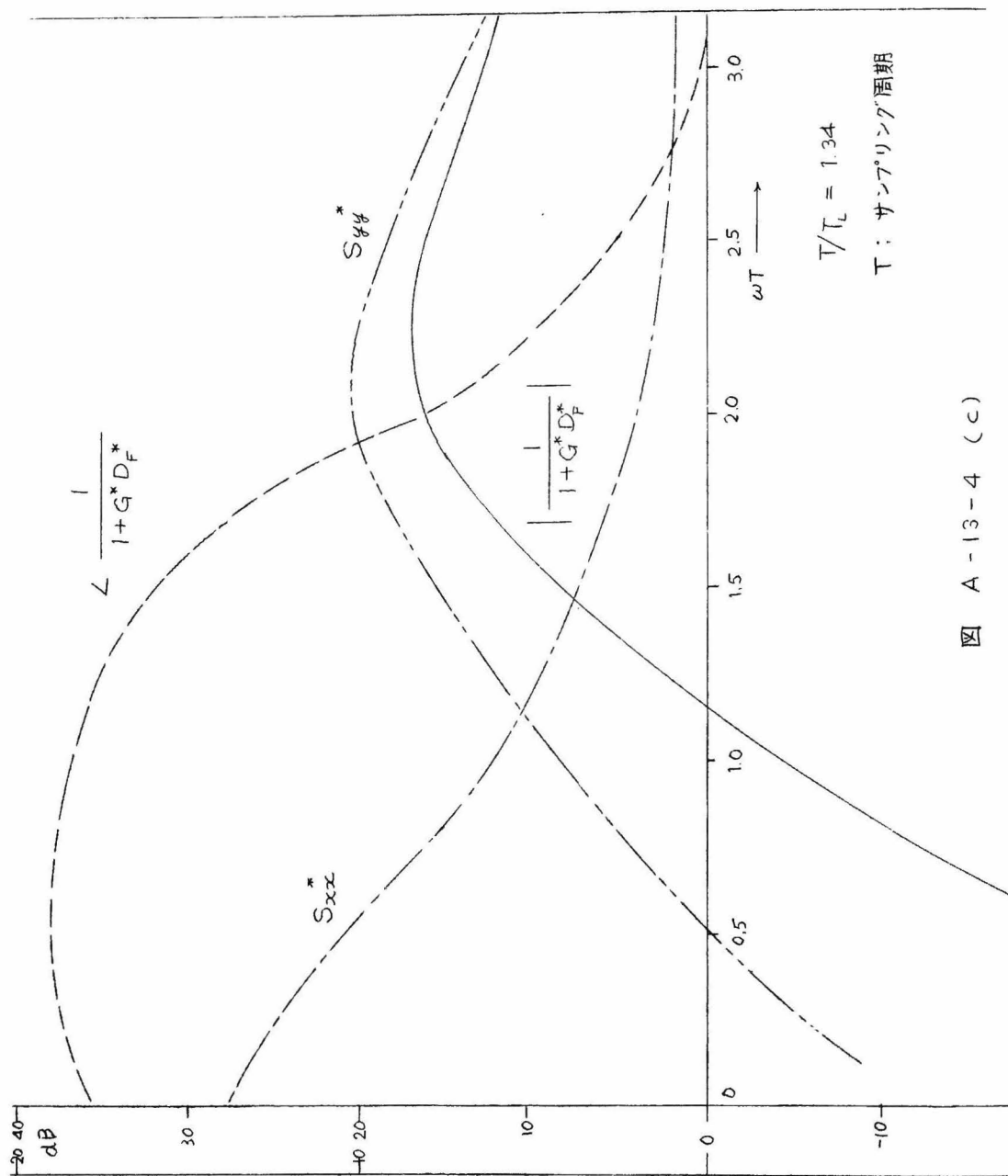


図 A-13-4 (c)

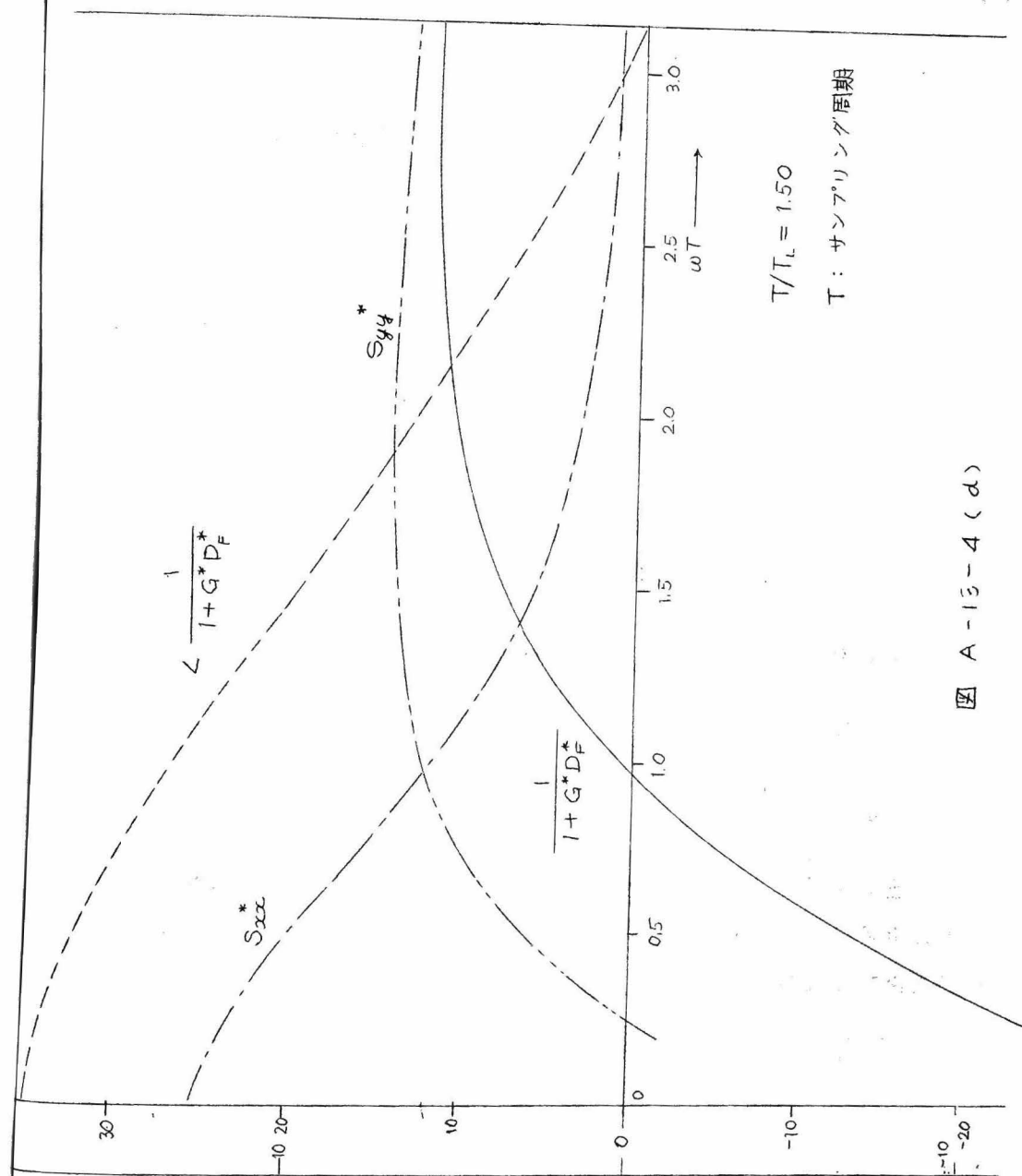


図 A-13-4 (d)

したがって、 $S_{xx}^*(z)$ はサンプリング周期 T によってその形をかえる。ところが、

$$\begin{aligned}\overline{x(nT)^2} &= \frac{T}{2\pi j} \oint S_{xx}^*(z) z^{-1} dz \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - J_1^2}{T(1 - J_1 e^{-j\omega T})(1 - J_1 e^{j\omega T})} d\omega T \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - J_1^2}{(1 + J_1^2) - 2J_1 \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1 + J_1}{1 - J_1} \tan \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 \quad (A.14.4)\end{aligned}$$

すなわち $\overline{x(nT)^2}$ は T の如何をとわず 1 である。

附 録 15 (本文 251 頁 10.4)

本文式 (10.3), (10.5) および $D_F^*(z) = K_C / (1 - z^{-1})$ なる関係から、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + HG^* D_F^*} &= \frac{1 + Fz^{-1} + Cz^{-2}}{1 + Dz^{-1} + Ez^{-2}} \\ F &= -(1 + e^{-\frac{T}{T_1}}), \quad C = e^{-\frac{T}{T_1}}, \quad D = K(1 - e^{-\frac{T-1}{T_1}}) - (1 + e^{-\frac{T}{T_1}}) \\ E &= e^{-\frac{T}{T_1}} - K(e^{-\frac{T}{T_1}} - e^{-\frac{T-1}{T_1}}) \quad (A.15.1)\end{aligned}$$

また附録 13 における式 A.13.10) に対し、 $z = (1 + \alpha)/(1 - \alpha)$ なる双一次変換を行えば、

$$\overline{y(nT)^2} = \frac{T}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} G^*(\alpha) G^*(-\alpha) S_{xx}^*(\alpha) \frac{2}{1 - \alpha^2} d\alpha \quad (A.15.2)$$

上式において、

$$G^*(\alpha) = \frac{(1 + F + C) + 2(1 - C)\alpha + (1 - F + C)\alpha^2}{(1 + D + E) + 2(1 - E)\alpha + (1 - D + E)\alpha^2}$$

$$= \frac{2\alpha(V+W\alpha)}{X+Y\alpha+Z\alpha^2} \quad (\text{A.15.3})$$

ここに

$$\begin{aligned} V &= 1-C, \quad W=1+C, \quad X=K(1-C), \quad Y=2[(1-C)+KC(1-C')] \\ Z &= (2-K)(1+C)+2KCC', \quad C=e^{-\tau_s/\tau}, \quad C'=e^{-(\tau_s-1)/\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.15.4})$$

$$S_{xx}^*(\alpha) = \frac{J_0}{T} \frac{1-\alpha}{(1-J_1)-(1+J_1)\alpha} \cdot \frac{1+\alpha}{(1-J_1)+(1+J_1)\alpha} \quad (\text{A.15.5})$$

$$J_0 = K_i'(1-e^{-2\omega_1 T}), \quad J_1 = e^{-\omega_1 T} \quad (\text{A.15.6})$$

$$\text{故に } \overline{y(nT)^2} = \frac{K_i}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} G_i(\alpha) G_i(-\alpha) d\alpha \quad (\text{A.15.7})$$

ここに

$$K_i' = 8J_0,$$

$$\begin{aligned} G_i(\alpha) &= \frac{V\alpha + W\alpha^2}{(X+Y\alpha+Z\alpha^2)[(1-J_1)+(1+J_1)\alpha]} \\ &= \frac{W\alpha^2 + V\alpha}{A_3\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0} \end{aligned} \quad (\text{A.15.8})$$

ここに

$$\begin{aligned} A_0 &= K(1-C)(1-J_1) \\ A_1 &= 2(1-C)(1-J_1) + K[1-2CC'+C+J_1(1-3C+2CC')] \\ A_2 &= 4(1-J_1C) + K[C-1+J_1(1+3C+4CC')] \\ A_3 &= (1+J_1)[2(1+C)-K(1+C-2CC')] \end{aligned} \quad (\text{A.15.9})$$

一方、つぎの公式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{(n_2\alpha^2 + n_1\alpha + n_0)(n_2\alpha^2 - n_1\alpha + n_0)}{(m_3\alpha^3 + m_2\alpha^2 + m_1\alpha + m_0)(-m_3\alpha^3 + m_2\alpha^2 - m_1\alpha + m_0)} d\alpha \\ &= \frac{n_2^2 m_1 m_0 + (n_1^2 - 2n_2 n_0) m_3 m_0 + n_0^2 m_3 m_2}{2m_3 m_0 (m_2 m_1 - m_3 m_0)} \end{aligned} \quad (\text{A.15.10})$$

を利用することにより、

$$\overline{y(nT)^2} = \frac{W^2 A_1 + V^2 A_3}{A^3 (A_1 A_2 - A_0 A_3)}$$

(A.15.11)

で計算される。

参 考 文 献

全編を通じて解析の基礎となったサンプル値制御の基礎理論に関しては、つぎの書に詳述、もしくは要約されている。

- 1) John R. Ragazzini & Gene F. Franklin : Sampled-Data Control System, McGraw-Hill, 1958.
- 2) Eliahu I. Jury : Sampled-Data Control Systems, John Wiley & Sons, 1958.
- 3) Julius T. Tou : Digital & Sampled-Data Control Systems, McGraw-Hill, 1959.
- 4) John G. Truxal : Control System Synthesis, McGraw-Hill, 1955, p. 500~557
- 5) Tsien : Engineering Cybernetics, McGraw-Hill, 1954, p. 83~92.
- 6) Cornelius T. Leondes : Computer Control Systems Technology, McGraw-Hill, 1961, p. 307~362.
- 7) John E. Gibson : Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill, 1963, p. 94~130.

各章別関係論文

第 2 章

- 1) 林重憲, 近藤文治, 岩井壮介 : Cut Off Operator 法による不連続制御系の解析、昭和 31 年 4 月 電気四学会連合大会, 492.
- 2) 林重憲, 近藤文治, 岩井壮介 : 開閉制御系の安定問題、昭和 31 年 124.
- 3) 林重憲, 近藤文治, 岩井壮介 : カット・オフ・オペレータ法によるサンプリグ制御系の解析、昭和 32 年 6 月 電気通信学会自動制御研究専門委員会資料

第 3 章

- 4) 近藤文治、岩井壮介 : マルチルート制御方式による有限整定時間
応答系の改良、昭和33年10月、電気関係学会関西支部連合大会, 41.

第 4 章

- 5) 近藤文治、岩井壮介 : 非線形サンプル値制御系の解析、昭和34年
4月 電気四学会連合大会, 165
6) 近藤文治、岩井壮介 : 飽和の有限整定時間応答系に及ぼす影響,
昭和34年11月, 第2回自動制御連合講演会, 126

第 5 章

- 7) 近藤文治、岩井壮介、曾我正和 : サンプル値制御系の飽和による
乱調現象、昭和34年 電気関係学会関西支部連合大会, 32
8) 近藤文治、岩井壮介、曾我正和 : Finite Settling-time Res-
ponse in Sampled-data Control Systems with Satur-
ation, Proceedings of the 1st International Congress
of the International Federation of Automatic Control,
Moscow, 1960.

第 6 章

- 9) 近藤文治、岩井壮介 : サンプル値系の非線形振動の一解析法、昭
和37年、電気四学会連合大会、262.
10) 近藤文治、岩井壮介 : サンプル値系における整数倍非線形振動の
安定判別(可変ゲイン・サンプル値系の安定判別)、昭和37年、
電気関係学会関西支部連合大会 4-12.
11) 近藤文治、岩井壮介 : 非線形サンプル値制御系におけるリミット
サイクルとその安定判別、昭和38年第2回日本自動制御学術講演
会 107.
12) 近藤文治、岩井壮介 : Analytical Approaches to Non-linear

Sampled-data Control Systems, Proceedings of the 2nd International Congress of the International Federation of Automatic Control, Switzerland, 1963.

第 7 章

- 3) 近藤文治、岩井壮介、多田智彦 ; 飽和を含むサンプル値制御系の解析、昭和 35 年、電気四学会連合大会 258.
- 4) 近藤文治、岩井壮介、多田智彦 ; サンプル値制御系における条件付安定現象、昭和 35 年 第 3 回自動制御連合講演会 116
- 5) 近藤文治、岩井壮介、: サンプル値制御系に対する等価伝達関数法の適用、昭和 36 年 電気四学会連合大会, 252
- 6) 近藤文治、岩井壮介、多田智彦 ; 飽和を含むサンプル値制御系における条件付安定現象 昭和 35 年 電気通信学会非直線理論研究専門委員会資料.

第 8, 9 章

- 7) 近藤、岩井、田丸啓吉、西田武彦 ; 簡易型サンプル値制御装置、昭和 35 年、第 3 回自動制御連合講演会, 118.
- 18) 近藤文治、岩井壮介、田丸啓吉、: 簡易型サンプル値制御装置、制御工学第 6 巻第 2 号 昭和 37 年

第 10 章

- 19) 近藤文治 星野聰 岩井壮介、熊丸博之 : 伸線被覆機のサンプル値多重制御装置、昭和 37 年、第 5 回自動制御連合講演会, 214.

